Filosofía de las matemáticas

Pablo Cobreros
Modo de citar:
Cobreros, Pablo. 2016. "Filosofía de las matemáticas". En Diccionario Interdisciplinar Austral, editado por Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck. URL=https://dia.austral.edu.ar/Filosofía_de_las_matemáticas

La Filosofía de las matemáticas es la reflexión filosófica sobre la ontología, la epistemología, el desarrollo y métodos de las matemáticas. Siendo las matemáticas una ciencia y teniendo en cuenta el papel esencial de las matemáticas en las ciencias experimentales, se puede considerar que la Filosofía de las matemáticas es una parte de la Filosofía de la ciencia. Sin embargo, el carácter peculiar de los objetos matemáticos (aparentemente, entidades abstractas como los números y las funciones) y la naturaleza peculiar del conocimiento matemático (aparentemente, totalmente necesario y *a priori*) sugiere que la Filosofía de las matemáticas es una disciplina filosófica propia.

La reflexión filosófica sobre las matemáticas está presente de manera explícita en los orígenes de la Filosofía occidental. Es posible identificar al menos tres motivos por los que las matemáticas han despertado este interés. Las matemáticas ejemplifican, en primer lugar, varias distinciones tradicionales de reflexión filosófica: uno y múltiple, eterno y cambiante, inteligible y sensible. Las matemáticas han sido consideradas, en la tradición occidental, un modelo eminente de conocimiento y sus avances han constituido avances en el conocimiento en general. Ténganse en cuenta, por ejemplo, los *Elementos* de Euclides, el descubrimiento de los números irracionales y los números imaginarios, el cálculo y las geometrías no-euclidianas. Finalmente, las matemáticas han dado lugar a resultados relevantes para la comprensión de la naturaleza de las propias matemáticas, como las posibilidades de formalización, representación y axiomatización de distintas ramas de las matemáticas.

En este artículo se introducen en primer lugar las preguntas centrales de la Filosofía de las matemáticas. La Filosofía de las matemáticas tuvo un gran desarrollo durante el siglo XX, de modo que los autores centrales de este período (Frege, Hilbert y Brouwer) nos permiten comprender las posiciones principales dentro de la Filosofía de las matemáticas. En tercer lugar describiremos brevemente las principales posturas contemporáneas.

Una aclaración sobre la extensión y precisión de este artículo. La literatura sobre la Filosofía de las matemáticas a lo largo del pensamiento occidental es muy extensa por lo que en este artículo hemos tenido que seleccionar autores y temas. Además, algunas discusiones dentro de la Filosofía de las matemáticas envuelven cuestiones de una notable sofisticación técnica. Teniendo en cuenta el propósito del Diccionario Interdisciplinar Austral, hemos procurado entrar en estas cuestiones de manera que el texto sea auto-contenido y no excesivamente técnico a la par que informativo.

1 Preguntas centrales ↑

La reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas ha ocupado un lugar destacado en toda la historia del pensamiento occidental. Podemos encontrar tres grandes motivos para explicar este fenómeno.

En primer lugar, las matemáticas parecen situarse en el quicio de varias distinciones filosóficas. Los números tratan simultáneamente acerca de la unidad de las cosas múltiples; las relaciones matemáticas parecen eternas y, a la vez, permiten describir el movimiento de los cuerpos; las proposiciones geométricas expresan verdades sin aparentemente contenido sensible que, sin embargo, parecen ser realizadas (aunque imperfectamente) por objetos del mundo sensible. El hecho de conectar cuestiones aparentemente opuestas dota a las matemáticas de singular atractivo y belleza.

En segundo lugar, el conocimiento matemático ha sido considerado por muchos autores como modelo de conocimiento, particularmente en la tradición racionalista moderna, como es el caso de Descartes, Spinoza o Leibniz. Estas opiniones están presumiblemente ligadas al hecho de que el avance en el conocimiento matemático ha supuesto habitualmente un avance general del conocimiento. Los descubrimientos matemáticos más importantes han dado lugar de modo regular a avances en áreas más allá de las matemáticas. Un ejemplo claro es el cálculo diferencial que permitió el desarrollo de la mecánica clásica. Otro ejemplo, quizá menos conocido, es la demostración de los teoremas de *incompletud* en los que se define la noción de *función recursiva primitiva* fundamental para el desarrollo de la computación.

En tercer lugar, de modo particular durante el siglo XX, las matemáticas han dado lugar a resultados que muestran aspectos de la propia naturaleza de las matemáticas. Estos resultados se refieren a la posibilidad de representación de las matemáticas a través de lenguajes formales y de la demostración reglada de afirmaciones matemáticas dentro de estos sistemas.

Podemos distinguir dos grandes tipos de cuestiones dentro de la Filosofía de las matemáticas, cuestiones de *epistemología* de las matemáticas y cuestiones de *ontología* de las matemáticas. Estos dos grupos de cuestiones van generalmente unidos, en el sentido de que la visión que uno mantenga sobre un grupo de cuestiones influirá en la visión sobre el otro grupo de cuestiones.

Dentro de la epistemología de las matemáticas, la visión clásica mantiene que el conocimiento matemático tiene dos marcas características, que contrastan con otros tipos de conocimiento: es necesario y *a priori*. El conocimiento matemático contrasta en su necesidad con la mayor parte de las afirmaciones científicas. Es verdad que los mamíferos tienen pelo, pero parece perfectamente posible que no lo tengan. La estructura del ADN podría haber estado formada por dos cadenas paralelas en lugar de tener forma de doble hélice. La velocidad de la luz en el vacío es de aproximadamente 300.000 kilómetros por segundo, pero, aparentemente, podría haber sido un poco más o un poco menos. Por otro lado, no parece tener sentido afirmar que es posible que $7+2=10$ o que podría haber habido un número finito de números primos. Se debe considerar además que, mientras que el conocimiento de las ciencias experimentales es revisable y en ocasiones se han descartado ideas muy arraigadas y que habían sido aceptadas durante cientos de años, el conocimiento matemático parece inamovible una vez ha sido establecido: la demostración matemática parece eliminar cualquier posibilidad de duda.

La *a prioricidad* tiene que ver con la naturaleza de la justificación requerida para que una creencia pase a ser conocimiento; concretamente, si tal justificación depende de algún aspecto particular de la experiencia sensible o si es independiente ("anterior") a ella. Al menos desde el s. XVII se conjeturó que la luz se desplazaba a una velocidad finita, sin embargo, los métodos de medición no resultaban lo suficientemente precisos para obtener una experiencia directa de la velocidad de la luz. La primera medida acertada a través de un aparato de medición fue realizada Hippolyte Fizeau en 1849. Hoy sabemos que la afirmación,

(1) La velocidad de la luz en el vacío es de aproximadamente 300.000 Km/s

es verdadera. La justificación requerida para llegar a conocer esta afirmación depende del acceso a experiencias muy concretas, de modo que se trata de un conocimiento claramente *a posteriori*. Por otro lado, no sabemos si la afirmación

(2) Todo par mayor que dos es igual a la suma de dos primos

es verdadera o falsa, pero parece que su demostración o refutación es independiente de nuestra capacidad de acceder a ningún tipo de experiencias sensibles particulares.

Finalmente, la afirmación

(3) Hay infinitos números primos

es conocida al menos desde época de Euclides. Su demostración, sin embargo, no parece hacer referencia a ninguna experiencia particular.

En relación a la ontología de las matemáticas existen dos posturas definidas por oposición: el realismo y el antirrealismo (este debate tiene una estrecha relación con el debate medieval sobre el *problema de los universales*). El realismo mantiene que los objetos matemáticos tienen una existencia propia, independiente de la mente del matemático. El antirrealismo es la postura que rechaza que los objetos matemáticos tengan una existencia independiente de la mente. Ahora bien existen al menos dos modos de rechazar el realismo: bien porque la existencia de los objetos matemáticos depende de la actividad mental (idealismo) o bien porque los objetos matemáticos no existen en ningún sentido (nominalismo).

Una forma de realismo clásico es el platonismo, según el cual los objetos matemáticos tienen una existencia propia, necesaria y eterna en un mundo separado de nuestro mundo físico aunque igualmente real (o más) ¿Qué objetos matemáticos son exactamente aquellos que tienen una existencia objetiva? ¿Los números naturales, los racionales o los reales? ¿quizá los números imaginarios? ¿o quizá figuras geométricas como puntos y rectas? ¿o relaciones y funciones? Dado que algunas ramas de la matemática pueden ser traducidas a otras ramas, no parece razonable suponer que existan todos estos tipos de objetos. Un candidato natural para ocupar este puesto es *el conjunto*, como comentaremos más adelante.

Del lado antirrealista, el idealismo mantiene que los objetos matemáticos no tienen una existencia propia e independiente de la mente, sino que necesitan de la actividad de la mente para existir. Un buen ejemplo es Kant para quien espacio y tiempo, temas de la geometría y de la aritmética, dependen del componente formal de la experiencia, que es puesto por el sujeto. Más contemporáneo pero siguiendo la estela kantiana L. E. J. Brouwer (1881-1966) asume explícitamente la idea de que los objetos matemáticos no son más que cierto tipo de construcción mental.

Los nominalistas toman, dentro del lado antirrealista, una posición más radical. De acuerdo con los nominalistas los objetos abstractos no existen de ninguna manera, ni independientemente de la mente del matemático ni como resultado de su actividad mental. Un modo de entender la posición nominalista consiste en entender que, en el caso del lenguaje matemático, no existe distinción entre uso y mención: los términos matemáticos hacen referencia a ellos mismos (los objetos matemáticos son, en este sentido, entidades lingüísticas). Finalmente, una posición aún más radical y unida al nominalismo es el nihilismo, la idea de que los objetos matemáticos no existen (ni dependiente ni independientemente de la mente) y ni siquiera los términos matemáticos hacen referencia a objetos de ninguna clase.

Antirrealistas y realistas suelen tomar posiciones opuestas en torno a dos cuestiones: la cognoscibilidad de las afirmaciones matemáticas y la lógica y semántica del discurso matemático.

El conocimiento implica verdad en el sentido de que si sé que dos más dos son cuatro, entonces es verdad que dos más dos son cuatro. No sé que dos más dos son cinco pues es falso que dos más dos son cinco. Más aún, no puedo saber que dos más dos son cinco, siendo falso que dos más dos es cinco. La verdad es condición necesaria de la posibilidad de conocimiento. Ahora bien, ¿es cognoscible todo aquello que es verdadero? Si el universo matemático, existe en toda su exuberancia con independencia de la mente humana, como afirman los realistas, es natural suponer que hay verdades que están más allá de nuestras limitadas capacidades cognoscitivas. Hay muchas verdades que ni siquiera soy capaz de mencionar (desafortunadamente, no puedo poner ningún ejemplo). Por el contrario, parece poco razonable sostener que hay verdades más allá de la capacidad cognoscitiva del ser humano cuando el universo matemático está generado por la propia actividad mental del matemático. Realistas y antirrealistas típicamente discrepan en este punto, para los segundos verdad y cognoscibilidad tienen la misma extensión, para los primeros la verdad es más amplia.

Otro punto clásico de discrepancia entre realistas y antirrealistas es el Principio de Bivalencia. De acuerdo con este principio, toda afirmación no ambigua tiene un valor de verdad "verdadero" o "falso" y sólo uno. Si pensamos que el universo matemático está determinado desde toda la eternidad y hasta sus últimos detalles (realismo) es natural asumir que cualquier afirmación no ambigua que podamos realizar sobre él será verdadera o falsa. Si, por el contrario, el universo matemático depende de la mente para existir, podríamos encontrarnos que hay detalles o relaciones que escapan de alguna manera a la actividad mental del matemático o que aún no han quedado totalmente determinadas por ella (el universo matemático está *incompleto*). En este segundo supuesto, podría haber excepciones al principio de bivalencia.

Como ilustración podemos tomar la *Hipótesis del Continuo* de Cantor. De acuerdo con esta hipótesis, no existe ningún conjunto con un cardinal mayor que el de los números naturales y menor que el de los números reales. A pesar de sus esfuerzos y su capacidad matemática, Cantor no fue capaz de demostrar la Hipótesis del Continuo (es el primer problema de la famosa lista propuesta por Hilbert en 1900 que recogía los 23 problemas más importantes de las matemáticas). Hoy en día sabemos (gracias a resultados de Gödel en 1940 y Cohen en 1963) que la Hipótesis del Continuo es independiente de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (es decir, no se puede ni demostrar ni refutar a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel). Dado que dentro de esta teoría es posible expresar gran parte de la matemática conocida, es natural suponer, para el antirrealista, que la Hipótesis del Continuo no tiene un valor definido. El realista, por el contrario, mantendrá que tiene un valor definido, independiente de nuestras consideraciones sobre el tema.

La discrepancia en torno al principio de bivalencia puede derivar en una discrepancia sobre qué inferencias son válidas dentro del terreno matemático. Bajo ciertos supuestos, el principio de bivalencia viene expresado por la validez de la *ley de tercio excluso*, $A \vee \neg A$

De modo que una posición antirrealista puede muy bien rechazar este principio de la lógica clásica y otros relacionados, como la eliminación de la doble negación (ver sección 2.3).

Una cuestión general que requiere de explicación, sea uno realista o antirrealista, es el rol destacado que ocupan las matemáticas en gran parte de las explicaciones científicas y su aplicabilidad al mundo material. Como es bien sabido, el inicio de la mecánica está ligado al descubrimiento del cálculo. Muchos avances matemáticos han iluminado cuestiones de ciencia empírica y, en la otra dirección, cuestiones de la ciencia experimental han motivado el avance de teorías matemáticas.

Finalmente, hay que notar que las diversas tradiciones de pensamiento pueden imponer dificultades añadidas o condicionamientos sobre la visión acerca de las matemáticas. El empirismo es la corriente de pensamiento que no acepta otra justificación inmediata (es decir, distinta a razonamientos o inferencias) de una creencia que no sea la experiencia sensible. El racionalismo por su parte acepta que la experiencia sensible es una fuente inmediata de justificación del conocimiento, pero reconoce que no es ni la única ni la más importante; pueden existir otro tipo de justificaciones inmediatas como intuiciones racionales o conocimientos innatos. El empirismo es una corriente difícil de cuadrar con el platonismo, pues difícilmente los objetos abstractos pueden caer en el campo de la experiencia sensible. Es natural, por tanto, para una mentalidad empirista tender a una explicación antirrealista de las matemáticas y para un platonista tender hacia posiciones racionalistas.

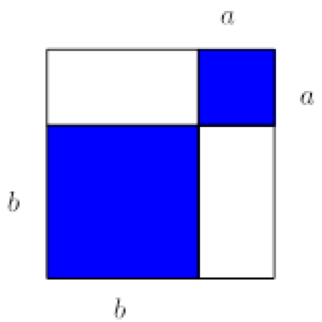
Las posiciones de Platón y Kant en favor del realismo y del idealismo, respectivamente, son destacadas. De acuerdo con Platón debemos distinguir el mundo del devenir, que es aquél que cae bajo la experiencia sensible, y el mundo del ser que es puramente inteligible. El mundo del devenir no es completamente irreal, pero refleja solo parcialmente la auténtica realidad que es el mundo inteligible de las formas. Dentro de esta ontología las matemáticas juegan un papel destacado como mediadoras entre el mundo sensible y el mundo inteligible. En el caso de la geometría, por ejemplo, los puntos, las rectas, planos y esferas son entidades inteligibles instanciadas solo imperfectamente por los objetos sensibles.

En el libro VI de la República Platón expone la metáfora de la línea que divide los dos mundos: el mundo del devenir en un plano inferior y el mundo del ser en un plano superior. Estos dos mundos están a su vez divididos por otras dos líneas. El mundo del devenir contiene en su parte inferior los reflejos de los objetos físicos, en su parte superior los objetos físicos. En la parte superior del mundo del ser se encuentran las formas y mientras que los objetos matemáticos, a pesar de estar del lado del mundo inteligible están aún colindando con el mundo de los objetos físicos (Platón 510a-511c). La epistemología de Platón es fuertemente anti-empirista, siendo la experiencia sensible meramente una ocasión para el recuerdo de las formas que el alma tiene de manera innata, como se argumenta en el *Menón* (Platón 82b-85d). Ver (Wedberg 1955) para más sobre Platón y la Filosofía de las matemáticas.

Por su parte, Kant hereda la distinción, presente en las tradiciones empirista y racionalista, entre juicios analíticos y juicios sintéticos y añade una segunda caracterización de los juicios: *a priori* y *a posteriori*. La distinción entre analítico y sintético es una distinción más ligada al contenido de un juicio (los juicios analíticos son aquellos en los que el predicado está contenido en el sujeto, como "todo soltero es no-casado"). La distinción entre *a priori* y *a posteriori* es una distinción ligada a la justificación del juicio, como se discutió más arriba. Se podría pensar que los juicios de las matemáticas son necesarios debido a que son analíticos, sin embargo Kant desafía esta idea. De acuerdo con Kant, los juicios de la geometría y de la aritmética, al menos parte de ellos, son sintéticos *a priori*.

De acuerdo con Kant nuestras percepciones del mundo tienen un componente material y un componente formal. El componente material es aquello que el mundo aporta a los sentidos, el componente formal es el modo en que la subjetividad organiza lo dado a los sentidos. El espacio y el tiempo son la forma de los sentidos externos e internos. Las impresiones de los sentidos externos tienen una clara dimensión espacial mientras que las de los sentidos internos (memoria, sentido común e imaginación) una dimensión temporal. El espacio y el tiempo, por tanto, no son sustancias ni cualidades de las cosas, sino estructuras introducidas por la subjetividad en el conocimiento sensible. Los juicios de la geometría y de la aritmética versan sobre el espacio y el tiempo (en el caso de la aritmética, nótese que la idea de sucesión es clave para entender los números naturales). Sus juicios son *a priori* pues su justificación no depende de ninguna experiencia particular, sino del componente formal de toda experiencia. Son sintéticos, sin embargo, porque su contenido no establece meras relaciones entre los conceptos involucrados sino que implica una participación de la intuición.

El teorema del binomio, para exponente 2, establece que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Esta proposición puede demostrarse geométricamente:



En el dibujo puede observarse que el área formada por la suma de los segmentos a y b elevada al cuadrado es igual al área formada por la suma de cada segmento al cuadrado más dos veces ab. Hemos dicho que es posible *observar* que el área formada por la suma... Pero en sentido estricto, lo que observamos son manchas en un papel (o luces en la pantalla del ordenador) particulares y con cierto grosor. La idea kantiana según la cual las proposiciones de la geometría y de la aritmética son sintéticas a priori se puede entender de este modo: somos capaces de abstraer las condiciones materiales de la intuición de modo que, por ejemplo, el dibujo de arriba constituye una demostración del binomio. Ver (Posy 1992) para más sobre Kant y su Filosofía de las matemáticas.

2 Tres grandes tradiciones del siglo XX ↑

A principios del siglo XIX tuvo lugar el descubrimiento de las geometrías no-euclidianas; ver (van Frassen, 117-128) y (Blumenthal 1980, cap. 1). Este hecho llamó la atención sobre la necesidad de emplear, dentro de las matemáticas, un lenguaje más preciso y en el que fuera posible tener un mayor control sobre las inferencias válidas. Por otra parte, durante la segunda mitad del mismo siglo, Cantor y Dedekind desarrollaron la teoría de conjuntos que permitía definir con precisión nociones matemáticas centrales como la idea de número real y función real (Goldrei 1996, cap. 2). Sin embargo, la teoría de conjuntos, tal y como se había trabajado hasta entonces, es *inconsistente*. Este contexto propició el interés por el estudio de los fundamentos de las matemáticas y dio lugar a varias corrientes de Filosofía de las matemáticas durante el siglo XX.

2.1 Logicismo ↑

El logicismo mantiene que la naturaleza de las matemáticas es puramente lógica, siendo sus afirmaciones reducibles a afirmaciones que envuelven exclusivamente conceptos lógicos. El autor más destacado dentro de esta corriente de pensamiento es el matemático y filósofo alemán Gottlob Frege (1848-1925).

De acuerdo con Frege la matemática, particularmente la aritmética, es analítica y *a priori*. Frege entiende, sin embargo, los conceptos de *analiticidad* y *a prioricidad* en un sentido distinto al kantiano. De acuerdo con Frege, una proposición es analítica cuando su demostración se puede fundamentar exclusivamente en las leyes de la lógica y definiciones que envuelvan exclusivamente conceptos lógicos. Demostrar que las matemáticas son analíticas consiste en demostrar que sus proposiciones son demostrables a partir de las leyes de la lógica y definiciones. En este sentido, el proyecto logicista de Frege consiste en demostrar que la aritmética es analítica. Es decir, Frege pretende definir (a través de conceptos lógicos) qué es un número natural, en qué consiste la suma, la multiplicación y la exponenciación y cómo derivar de estas definiciones cualquier afirmación aritmética verdadera (Frege 1884).

Para Frege, las nociones de *concepto*, *extensión* e *identidad* forman parte de los conceptos de la lógica, como las nociones de *conjunción* o *generalización existencial*.[1]

Frege liga, en primer lugar, la idea de número a la extensión de los conceptos. Dos conceptos son equinuméricos cuando existe una correspondencia biunívoca entre sus extensiones. El primer paso de Frege emplea el, así llamado, Principio de Hume:

Dados dos conceptos, A y B, el número de (A) = El número de (B) exactamente si A y B son equinuméricos.

Un número n es el sucesor de un número m cuando hay un concepto F y un objeto x que cae bajo tal concepto de modo que, el número de $(F(y)) = n$

el número de $(F(y) \wedge y \neq x) = m$

(Intuitivamente: n es el sucesor de m cuando hay un concepto con al menos un objeto x que tiene exactamente n objetos en su extensión y el número correspondiente a la extensión cuando eliminamos x es m).

Tomemos ahora el concepto distinto de sí mismo (esto es, $x \neq x$). Dado que todos los objetos son idénticos a sí mismos, la extensión de este concepto es el conjunto vacío $\emptyset$. Frege identifica el cero con el objeto denotado por el número del concepto *distinto de sí mismo*, $0 =_{df}$ el número de $(x \neq x)$

A continuación Frege muestra cómo proporcionar una definición de cada número natural en términos similares. Finalmente, Frege define la idea general de número natural de esta manera:

Esto es, los números naturales son aquellos que tienen exactamente las propiedades que se heredan inductivamente a partir del cero.

A partir de las definiciones anteriores Frege muestra cómo es posible derivar diversas proposiciones aritméticas habituales. A esta derivación de las proposiciones fundamentales de la aritmética a partir de la lógica se la conoce como *el Teorema de Frege*.

El *Teorema de Frege* emplea la noción de correspondencia biunívoca implícita en el *Principio de Hume*. Una explicación cabal *a la Frege* requiere también una definición de esta y otras nociones empleando solo recursos lógicos. Su obra posterior, *Grundgesetze der Arithmetik* publicada en dos volúmenes (1893, 1903) contiene una teoría de las extensiones en la que se completa la tarea. En 1902, cuando Frege estaba dando su segundo volumen a la imprenta, recibió una carta de Bertrand Russell donde éste le explicaba que las leyes sobre las que había tratado de fundamentar la Aritmética eran inconsistentes (se trata de una versión de la famosa *Paradoja de Russell*). Frege respondió inmediatamente a Russell (van Heijenoort 1967, 126-8) e incluyó una nota sobre el asunto en su volumen, aunque parece que consideró su proyecto logicista devastado por el descubrimiento de Russell.

2.2 Formalismo: Hilbert ↑

La ontología de las matemáticas es siempre un campo controvertido. ¿Cuál es la referencia de los términos matemáticos? ¿Cuál es la referencia del término '5', por ejemplo? ¿Una entidad abstracta? La cuestión se agudiza si tenemos en cuenta que el desarrollo de las matemáticas ha ido ligado de manera sistemática a la introducción de *nuevas entidades* que han sido vistas, al menos inicialmente, con sospecha: desde los números negativos, a los reales y a los imaginarios por mencionar unos pocos ejemplos. El formalismo pretende librar a las matemáticas de la exuberancia metafísica a la que parece comprometida inicialmente.

La observación básica del formalismo es que la matemática es una práctica ligada a la manipulación reglada de símbolos. Esta observación queda reforzada por el hecho de que, a menudo, el modo de expresar una entidad matemática se considera definitorio del tipo de entidad. Por ejemplo, los números racionales suelen definirse como aquellos que se pueden escribir como una fracción de enteros, o las funciones recursivas como aquellas que pueden caracterizarse con determinado tipo de definiciones. El formalismo entiende que la explicación del significado del lenguaje matemático debe basarse en la manipulación de símbolos, sin necesidad de postular la existencia de entidades más allá de los símbolos matemáticos y sus reglas. El *formalismo de términos* (sostenido de manera naíf por Eduard Heine (1821-1881) y Johannes Thomae (1840-1921)) consiste en identificar las entidades matemáticas con los propios términos matemáticos. La referencia del término '0' es el propio símbolo. En este sentido, el formalismo de términos desdibuja la diferencia entre uso y mención para el lenguaje matemático.

Frege critica de manera contundente el formalismo de términos (Shapiro 2000, 143). En primer lugar, la referencia de los términos matemáticos no puede ser la *instancia* (en inglés *token*) de un término. Si ese fuera el caso, el enunciado '0 = 0' sería falso, pues a cada lado del símbolo de identidad aparecen *distintas* instancias de 0. Ahora bien, si los términos matemáticos tienen como referencia los términos como *tipos* (en inglés *types*), la supuesta ventaja del formalismo en cuanto a la ontología comienza a flaquear, pues los *tipos* son, en igual medida que los números fregeanos, entidades abstractas. Además, las matemáticas parecen desbordar completamente el lenguaje matemático y los términos matemáticos particularmente. Hay muchos números reales que no son nombrados por ningún término (al menos ningún término formado por un número finito de caracteres).

Una segunda forma de formalismo es el formalismo de reglas: los términos de las matemáticas no tienen ningún significado propio, sino solamente a partir de las reglas que gobiernan su uso. La analogía más clara es la del juego del ajedrez: el alfil no se define ni por su forma, ni por el material que lo compone, sino por su posición inicial y las reglas que gobiernan sus movimientos.

La visión de David Hilbert (1862-1943) sobre las matemáticas puede considerarse una variante del formalismo. Para entenderla, debemos apuntar un importante cambio en la concepción de las matemáticas durante el siglo XIX. El descubrimiento de las geometrías no euclidianas y su asimilación como teorías geométricas al nivel de la geometría de Euclides indujo un fuerte cambio en la comprensión de las mismas y, por extensión, de la matemática en general. Hasta entonces, el contenido de la geometría estaba de alguna manera ligado a nuestra comprensión intuitiva de nociones como *punto*, *línea* o *ángulo recto*. En su intento por demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los cuatro primeros, el Jesuita italiano Jerónimo Saccheri (1667-1733) asumió la siguiente negación del postulado (a la que llamó *hipótesis del ángulo agudo*):

5^h Por un punto exterior a una recta existe más de una paralela

Saccheri desarrolló la geometría resultante de este supuesto y, aunque no llegó a demostrar una contradicción explícita, consideró sus resultados suficientes para demostrar la inconsistencia de 5^h con los cuatro primeros postulados pues, "tales conclusiones repugnan a la naturaleza de la línea recta" (van Fraassen 1970, 119). La idea de Saccheri parece ser que tales conclusiones eran una especie de *juicios analíticamente falsos*, es decir, juicios que, aunque no son una contradicción explícita del tipo $A \wedge \neg A$, son falsos en virtud del significado los términos incluidos en el juicio (como ‘Pedro es un soltero casado’). De este modo, tales conclusiones resultarían suficientes para probar que la suposición de 5^h era falsa. El caso de Saccheri es irónicamente famoso, pues murió creyendo haber demostrado el quinto postulado cuando realmente, estuvo más cerca de demostrar su independencia. El trabajo posterior de Lobachevski, Bolyai, Gauss y Riemann sirvió para confirmar la existencia de teorías donde no se cumple el postulado de las paralelas que son tan consistentes como la geometría de Euclides.

Esta situación requirió el desarrollo de métodos de demostración formales, cuya aplicación fuera independiente del significado del *vocabulario no-lógico*, el vocabulario específico de la teoría, como 'punto' o 'línea recta' en geometría (el *vocabulario lógico* incluye expresiones del tipo 'y', 'no' y 'para todo'). El significado del vocabulario específicamente matemático tendría un papel en la formulación de los axiomas de la teoría. Ahora bien, una vez formulados los axiomas, debemos abstraernos del significado del vocabulario no-lógico y emplear los métodos formales de demostración para el desarrollo de la teoría. De esta manera podemos generar teorías matemáticas, siendo la consistencia de la teoría quien nos diga si la teoría tiene significado, y no nuestras intuiciones sobre, por ejemplo, la naturaleza de la línea recta (como sucedió a Saccheri). La idea de considerar las teorías matemáticas como conjuntos de oraciones que se derivan de un conjunto de axiomas a través de métodos formales se llama *deductivismo*.

La Filosofía de las matemáticas de Hilbert puede entenderse como una combinación de realismo (*matemática real*) y deductivismo (*matemática ideal*). La *matemática real* se refiere a una pequeña porción de las matemáticas: la *aritmética finitaria*. La caracterización de la aritmética finitaria está ligada a la representación formal de la artimética (como la *Aritmética de Peano*) y la división de oraciones dependiendo de sus cuantificadores. Las oraciones aritméticas se refieren primeramente a oraciones de la forma,

$$t = u$$

Donde t y u son términos (posiblemente complejos, como $(3^6 + 7)^3$) para hacer referencia a números naturales. Una afirmación aritmética es *efectivamente decidible* cuando hay un procedimiento mecánico (un programa de ordenador) capaz de resolver su verdad o falsedad en un número finito de pasos. Afirmaciones aritméticas de la forma anterior donde t y u no envuelven variables (y por lo tanto, realizan afirmaciones sobre números particulares) son *decidibles*. Los cuantificadores '$\forall$' (para todo) y '$\exists$' (existe) nos permiten hacer afirmaciones generales sobre números naturales, como por ejemplo,

$$\neg\exists x(s(x) = 0)$$

(informalmente: no existe un x tal que el sucesor de x es 0, esto es, el 0 no tiene antecesor)

que es verdadera acerca de los números naturales. Se dice que un cuantificador está *acotado* cuando hace referencia a un subconjunto finito de números naturales. Por ejemplo, en la siguiente oración,

$$\forall x(x < 10 \supset (Primo(x) \supset x = 2))$$

(informalmente: para todo número natural menor que 10, si es primo, es el 2)

que es falsa sobre los números naturales, el cuantificador ‘$\forall$’ aparece acotado. Pues bien, las oraciones con cuantificadores acotados, son también *efectivamente decidibles* pues, intuitivamente, el programa de ordenador que se encarga de decidir si la oración es verdadera o falsa tendrá que realizar una búsqueda sobre un número finito de casos. Ahora bien, cuando en una oración aparece un cuantificador no-acotado, no hay en general garantía de que el programa de ordenador que se encarga de decidir si la oración es verdadera o falsa termine. La siguiente oración, expresable en el lenguaje de la Aritmética de Peano, es un ejemplo de oraciones con cuantificadores no-acotados,

(Conjetura de Goldbach)

$$\forall x((Par(x) \wedge 2 < x) \supset \exists y \exists z((Primo(y) \wedge Primo(z)) \wedge x = y + z))$$

(informalmente: todo par mayor que dos es igual a la suma de dos primos)

La matemática real, de acuerdo con Hilbert, se reduce a la aritmética finitaria: el conjunto de verdades con cuantificadores acotados y algunas otras generalizaciones, en todo caso, todas ellas *efectivamente decidibles*.

La aritmética finitaria, sin embargo, es solamente una pequeña porción de la matemática (solamente la idea de *número real* desborda ya la aritmética finitaria). Hilbert considera *matemática ideal* a cualquier teoría que sobrepase los conceptos de la aritmética finitaria. De acuerdo con Hilbert, el único requisito para la legitimidad de una teoría ideal es que sea *conservadora* respecto de la aritmética finitaria. Intuitivamente, este requisito consiste en que, aunque una teoría ideal puede ser capaz de demostrar más afirmaciones que la aritmética finitaria, tiene que estar de acuerdo en las afirmaciones finitarias: una teoría ideal no debe demostrar ninguna afirmación finitaria falsa. La matemática ideal tiene contenido solo en virtud de su relación con la aritmética finitaria. Las afirmaciones de una teoría ideal que no corresponden a afirmaciones finitarias verdaderas son 'verdaderas' solo en el sentido minimalista de 'consistente con la aritmética finitaria'.[2]

El programa de Hilbert y el impacto de los Teoremas de Incompletud

La Filosofía de las matemáticas de Hilbert debe comprenderse en el contexto de la *crisis de los fundamentos* de las matemáticas. A finales del siglo XIX se sabía que la teoría de conjuntos, desarrollada principalmente por Cantor y Dedekind, podía emplearse para definir de modo preciso gran cantidad de nociones matemáticas (Goldrei 1996, c. 2). De modo particular, la definición conjuntista de *número real* parecía poner en tierra firme las ideas centrales del cálculo, teoría que contaba ya con numerosas aplicaciones. Sin embargo, la teoría de conjuntos, tal y como se había desarrollado, es inconsistente. Por ejemplo, la Paradoja de Russell muestra que es posible demostrar una contradicción a partir del conjunto $R = \{x \mid x \notin x\}$ (el conjunto de todos aquellos conjuntos que no se pertenecen a sí mismos). De acuerdo con la teoría *intuitiva* (no axiomatizada) de conjuntos, el conjunto R debe existir.

El conocimiento de las paradojas dentro de la teoría de conjuntos comenzó a ser preocupante. Por una parte la teoría de conjuntos parece un terreno peligroso para tratar de fundamentar la matemática; por otra parte la sospecha de inconsistencia podría extenderse sobre otras ramas de la matemática, como la propia aritmética. Y así lo consideró Hilbert:

"Debemos admitir que la situación en la que nos hallamos respecto a las paradojas es, a la larga, intolerable. Consideremos: en matemáticas, ejemplo de fiabilidad y verdad, las propias nociones de inferencia, tal y como se aprenden, se enseñan y se usan, dan lugar a consecuencias absurdas. ¿Y dónde más podremos encontrar fiabilidad y verdad cuando incluso el pensamiento matemático deja de serlo?" (Hilbert 1925, 374)

Hilbert propone el siguiente *programa* para solventar la situación. En primer lugar, axiomatizar todas las teorías matemáticas, es decir, formular, para cada teoría matemática, un conjunto de axiomas de un lenguaje formal, de manera que sea posible deducir de manera efectiva todas las oraciones verdaderas de la teoría (y sólo ellas). Este proyecto debe empezar por la aritmética que, como hemos visto, juega un papel central dentro de la visión hilbertiana de las matemáticas. En segundo lugar, debemos demostrar que las teorías así formalizadas son consistentes. De modo particular, hay que comenzar demostrando la consistencia de la aritmética, una vez formalizada (esto último ocupa el segundo puesto dentro de los 23 problemas de Hilbert). Hilbert estaba convencido de que la consistencia de estos sistemas formales se podía demostrar matemáticamente (en forma de slogan: la *metamatemática* es matemática).

Los famosos *Teoremas de Incompletud* de Gödel (1931) mostraron serias limitaciones para el programa de Hilbert y, por tanto, para la visión de Hilbert sobre la naturaleza de las matemáticas.

Supongamos que contamos con un lenguaje formal, el Lenguaje de la Aritmética $\mathcal{L}_A$, en el que además de expresiones lógicas como la conjunción y la negación, cuantificadores y variables individuales, tenemos el símbolo de identidad '$=$' y los símbolos aritméticos: '0', 's', '$+$' y '$\cdot$' para el cero, la sucesión, la suma y la multiplicación. En este lenguaje podemos expresar afirmaciones aritméticas verdaderas, como,

$$\forall x \, \forall y \, (x + y = y + x)$$

(para todo x y todo y, la suma de x más y es igual a la suma de y más x)

y afirmaciones aritméticas falsas, como,

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x+y)\cdot z = x + (y \cdot z))$$

Definamos la teoría de la aritmética $Teo(\mathcal{N})$ como el conjunto que contiene todas las oraciones del Lenguaje de la Aritmética que son verdaderas en la estructura de la aritmética $\mathcal{N}$ y solo las oraciones verdaderas en $\mathcal{N}$. Dado que toda oración de $\mathcal{L}_A$ es verdadera o falsa en $\mathcal{N}$, si una oración A es verdadera en $\mathcal{N}$ entonces $A \in Teo(\mathcal{N})$ y si A es falsa en $\mathcal{N}$ entonces $\neg A$ es verdadera en $\mathcal{N}$ de modo que $\neg A \in Teo(\mathcal{N})$. Es decir, por definición $Teo(\mathcal{N})$ es una teoría completa: *la* teoría de la aritmética. Esta definición de la teoría de la aritmética, sin embargo, no nos da ninguna pista sobre las que oraciones contiene. Nos gustaría saber, por ejemplo, si afirmaciones como la Conjetura de Goldbach son o no son parte de la teoría de la aritmética. Para ello podríamos tratar de axiomatizar $Teo(\mathcal{N})$, es decir, encontrar una lista de axiomas "fácilmente reconocibles", de manera que cualquier afirmación en $Teo(\mathcal{N})$ se derive por procedimientos cuya validez sea también "fácilmente reconocible". El primer teorema de incompletud establece que esta aspiración no es realizable.[3]

Primer Teorema de Incompletud. El conjunto de oraciones aritméticas verdaderas no es recursivamente enumerable.

Un conjunto Σ es recursivamente enumerable cuando o bien es vacío o hay una función recursiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma$ sobre la totalidad de Σ. Una función recursiva es, intuitivamente, una función que puede aplicarse mecánicamente y aporta, por tanto, un procedimiento "fácilmente reconocible" (hasta una máquina es capaz de hacerlo!) para generar las oraciones de la teoría. Las teorías axiomáticas, como la *Aritmética de Peano*, son recursivamente enumerables de modo que si las oraciones de la *Aritmética de Peano* son verdaderas en $\mathcal{N}$, se sigue del Primer Teorema de Incompletud que hay al menos una oración verdadera pero no demostrable por la *Aritmética de Peano*. El resultado no depende de una particular falta de la *Aritmética de Peano*: cualquier teoría axiomática $\mathbf{T}$ en el lenguaje de la aritmética $\mathcal{L}_A$ que sea "aritméticamente sólida" (esto es $\mathbf{T} \subseteq Teo(\mathcal{N})$ contiene alguna oración verdadera e indemostrable (contiene de hecho infinitas oraciones de este tipo). En este sentido, las teorías axiomáticas aritméticas son, si verdaderas, incompletas y de ahí el nombre del teorema.

Segundo Teorema de Incompletud. Hay una oración del Lenguaje de la Aritmética, $con_{\mathbf{AP}}$, que es verdadera exactamente si la *Aritmética de Peano* es consistente. Ahora bien, si la *Aritmética de Peano* es consistente entonces $con_{\mathbf{AP}}$ no es demostrable en la *Aritmética de Peano*.

Se suele decir que el segundo teorema muestra que una teoría axiomática como la *Aritmética de Peano* no puede demostrar su propia consistencia (esta afirmación general está sujeta a muchos matices). Ciertamente, si la oración $con_{\mathbf{AP}}$ no se puede demostrar en la *Aritmética de Peano*, con mayor motivo no se podrá demostrar en un sistema de axiomas menor. La oración podría demostrarse en un sistema de axiomas mayor que la *Aritmética de Peano*. El problema aquí es que esta demostración no serviría como evidencia de la consistencia de *Aritmética de Peano*: si queremos demostrar la consistencia de un sistema no podemos asumir la consistencia de uno más fuerte. Este segundo teorema se considera fatal en relación al programa de Hilbert y su visión sobre la naturaleza de las matemáticas, puesto que, presumiblemente, la aritmética finitaria es sólo una pequeña parte de la aritmética representable dentro de la *Aritmética de Peano* y, por tanto, completamente insuficiente para demostrar la consistencia de ésta.[4]

2.3 Intuicionismo: Brouwer ↑

Una de las figuras destacadas de la Filosofía de las matemáticas del siglo XX es el matemático y filósofo holandés L. E. J. Brouwer. La influencia de Brouwer reside, en buena medida, en que sus ideas en Filosofía de las matemáticas tienen consecuencias directas sobre el razonamiento y la práctica matemática en general y sobre resultados particulares de la matemática clásica.

Brouwer es seguidor de Kant en la idea de que las matemáticas están ligadas a la actividad mental del matemático. Las matemáticas no se refieren a entidades existentes de manera independiente de la mente (al estilo platónico) ni obtienen su significado de la estipulación de reglas para la manipulación de símbolos (al estilo formalista). Para Brouwer las matemáticas están ligadas a un genero especial de intuición que forma parte de la actividad matemática. Kant ligaba la geometría a la intuición del espacio y la aritmética a la intuición del tiempo. Brouwer piensa que el desarrollo de las geometrías no-euclidianas muestra que la justificación de los juicios de la geometría no puede depender de nuestras intuiciones del espacio. Por otro lado la geometría analítica (de estilo cartesiano, donde localizaciones en el plano pueden identificarse con pares de números reales) proporciona un modo de reducir la geometría al análisis, incluyendo las geometrías no-euclidianas. De acuerdo con Brouwer tanto la geometría como la aritmética son *sintéticas a priori* en el sentido kantiano de requerir la participación de la *intuición pura*. Sin embargo, Brouwer mantiene que ambas se fundan en la intuición del tiempo:

"Esta forma de neo-intuicionismo considera la separación de momentos vitales en partes cualitativamente diferentes, como unidas a la vez que separadas únicamente por el tiempo como el fenómeno fundamental del intelecto humano, pasando por la abstracción de su contenido emocional hacia el fenómeno fundamental del pensamiento matemático, la intuición de la unidad-dualidad pura. Esta intuición de unidad-dualidad, la intuición basal de las matemáticas, crea no solamente los números uno y dos, sino también todos los números ordinales finitos, en tanto que uno de los elementos de la unidad-dualidad puede ser considerado como una nueva unidad-dualidad, proceso que puede ser iterado indefinidamente; esto da lugar más adelante al menor ordinal infinito ω. Finalmente, esta intuición basal de las matemáticas, en la que lo conectado y lo separado, lo continuo y lo discreto quedan unidos, da lugar inmediatamente a la intuición del continuo lineal, esto es, a el “estar entre”, que no puede ser agotado por la interposición de nuevas unidades y que, por lo tanto, nunca puede ser considerado una mera colección de unidades" (Brouwer 1983a, 57).[5]

Como muestra el texto, la visión de Brouwer sobre el papel de la intuición en la construcción de las matemáticas no es de sencilla comprensión. Uno de los aspectos más fascinantes de la visión de Brouwer sobre la naturaleza de las matemáticas es que le lleva a repudiar algunos métodos e incluso resultados de la matemática clásica. Por ejemplo, la teoría de los cardinales de Cantor y Dedekind y su caracterización de número real presupone la existencia de totalidades infinitas bien definidas o *infinitos actuales*. Ahora bien, las totalidades infinitas actuales no cuadran con la finitud de la mente humana. Este tipo de entidades debe ser rechazado si los objetos matemáticos dependen de la actividad mental del matemático para su existencia. Como resultado de esta visión, los intuicionistas rechazan algunos resultados de la matemática clásica y, más aún, aceptan resultados cuya negación es demostrable en matemática clásica (ver Shapiro 2000, 181-3).

La visión intuicionista sobre las matemáticas implica también el rechazo a algunas formas de razonamiento clásicamente válidas. Consideremos el caso de una generalización existencial del tipo ‘hay un número x con cierta propiedad A’ (en símbolos: ‘$\exists x A$’). En lógica clásica podemos demostrar la generalización por procedimientos *indirectos*, sin tener la menor idea de cuál es el objeto del que hablamos. Más concretamente, en lógica clásica bastaría con demostrar una contradicción a partir de la negación de la generalización:

$\neg\exists x A \vdash B \wedge \neg B$ implica clásicamente $\vdash \exists x A$

(el símbolo ‘$\vdash$’ puede leerse como ‘hay una demostración’)

Para el intuicionista, por el contrario, demostrar una generalización existencial requiere proporcionar un modo de construcción del objeto. El hecho de que de $\neg\exists x A$ podamos demostrar una contradicción solo nos permite establecer $\neg\neg\exists x A$,

$\neg\exists x A \vdash B \wedge \neg B$ implica intuicionistamente $\vdash \neg\neg\exists x A$

En efecto, los intuicionistas rechazan el principio clásico de *eliminación de la doble negación*:

$\neg\neg B \vdash B$

Cuando una afirmación B implica una contradicción, podemos concluir $\neg B$. Una demostración de $\neg B$, sin embargo, debe entenderse como una demostración de que B *no es demostrable*. Este hecho no garantiza, sin embargo, que B

sea demostrable. Junto a la eliminación de la doble negación, los intuicionistas rechazan también la validez de la ley de *tercio excluso*,

$\vdash B \vee \neg B$

Según Brouwer, el único fundamento para aceptar esta ley es el platonismo: la suposición de que los objetos matemáticos existen, con sus propiedades bien definidas, en un mundo independiente de la mente (véase, en particular: Brouwer 1983b, 90-6).

De acuerdo con Hilbert, la formulación explícita de las reglas de inferencia válida, esto es, la formulación de un cálculo lógico, juega un papel primario en la actividad matemática. Para Brouwer, por el contrario, la formulación de un cálculo lógico es un aspecto completamente prescindible dentro de las matemática. Las matemáticas se fundamentan en la construcción mental por parte del matemático, de modo que la explicitación de la lógica e incluso el uso del lenguaje para la comunicación de resultados son aspectos accidentales de las matemáticas. A pesar de esto, lo cierto es que la lógica intuicionista atrajo la atención de matemáticos y filósofos y ha sido objeto de un intenso estudio desde muy diversos puntos de vista.[6]

3 Realismo y antirrealismo ↑

Tras las tres grandes tradiciones: logicismo, intuicionismo y formalismo, la Filosofía de las matemáticas ha ido oscilando entre posiciones realistas y antirrealistas. Las siguientes tres cuestiones, dos de ellas formulas por Paul Benacerraf (en Benacerraf 1965 y Benacerraf 1973), se sitúan en el centro del debate.

a) La cuestión de la indispensabilidad

b) El problema epistemológico (Benacerraf)

c) El problema de la identificación (Benacerraf)

Es razonable pensar que la aceptación de qué entidades hay está ligada al tipo de entidades requeridas por nuestras prácticas científicas. Ahora bien, la ciencia moderna y contemporánea está fuertemente ligada al desarrollo de las matemáticas, por ejemplo, la mecánica clásica al análisis. ¿Significa esto que debemos aceptar la existencia de los números reales y las funciones sobre números reales sin más? (hay que tener en cuenta que la totalidad de números reales forma ya una colección infinita de cardinalidad mayor que la de los números naturales). Esta es la cuestión de la indispensabilidad (Colyvan 2001). Dentro de la balanza de problemas de Filosofía de las matemáticas, esta cuestión pesa del lado realista ¿cómo es posible la ciencia si, de acuerdo con el nominalismo, los números no existen? Field propone un programa nominalista para demostrar la dispensabilidad de las entidades matemáticas dentro de la ciencia. En su obra *Science without numbers* (Field 1980) trata de explicar cómo se puede hacer mecánica clásica sin necesidad de apelar a la existencia de los números. Si el programa de Field puede extenderse a otras áreas de la ciencia es una pregunta abierta. La cuestión de la indispensabilidad se sitúa también en contra del idealismo, pues la aceptación de totalidades infinitas como los números reales contrasta abiertamente con la finitud de la mente humana.

El realismo suele estar ligado a una visión *platonista* de las entidades matemáticas. Las entidades matemáticas son abstractas en el sentido, al menos, de no situarse en el espacio ni en el tiempo. El problema epistemológico, formulado en términos generales, consiste en preguntarse cómo es posible que seres como nosotros, localizados en el espacio y el tiempo y cuyas vivencias psicológicas están igualmente localizadas podamos tener algún tipo de relación con entidades abstractas. La apelación a una intuición racional o cualquier otra forma de justificación inmediata de afirmaciones sobre entidades abstractas es calificada de misticismo por los detractores del realismo. El conocimiento de las matemáticas se torna así altamente problemático dentro de la visión realista.

Si realmente hay entidades abstractas, como afirman los realistas, ¿debemos entender que existen los números, las funciones, los puntos, las líneas, los planos y todas las cosas de las que hablan las matemáticas, tomados de manera literal? Por un lado, la navaja de Ockham nos empuja a reducir tanto como sea posible el número de distintos tipos de entidades. Por otro lado, la existencia de fuertes correspondencias entre ramas de las matemáticas que aparentemente hablan de entidades distintas, nos lleva a pensar que solo existen un cierto tipo de entidades matemáticas. En este contexto, la noción de *conjunto* es prometedora pues, prácticamente toda la matemática conocida puede acomodarse dentro de la teoría de conjuntos. Ahora bien, existen muchos modos en los que podemos expresar los números naturales (por tomar un caso) empleando *conjuntos puros*, por ejemplo:

Propuesta a)

etc.

Propuesta b)

etc.

Dentro de ambas propuestas posible definir las operaciones aritméticas elementales: la sucesión, la suma, la multiplicación y la exponenciación, de manera que todas las afirmaciones verdaderas del Lenguaje de la aritmética (ver sección 2.2) sean verdaderas bajo estas definiciones. El problema, como apunta Benacerraf (1965), es que, aparentemente, ambas propuestas no pueden ser simultáneamente verdaderas. Pues si $\{\{\emptyset\}\} = 2$ (propuesta a) y $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} < nowiki >$ (propuesta b) entonces, dado que la identidad es transitiva, $\{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, lo cual es falso.

Una respuesta al *problema de la identificación* de Benacerraf es decir que todas las teorías matemáticas hablan acerca de *estructuras*. La aritmética, por ejemplo, no habla propiamente acerca de unos objetos matemáticos específicos, los números naturales, sino que habla acerca de una estructura en la que distintas posiciones en la estructura mantienen distintas relaciones con otras posiciones en la estructura. En este sentido, tanto la propuesta a) como la propuesta b) son adecuadas, en tanto que describen la estructura de los números naturales. Puesto que un número natural no es nada por encima de sus relaciones estructurales con otras posiciones en la estructura de la aritmética, aquellas preguntas que sobrepasan el ámbito estructural, son irrelevantes para la identidad de un número. Por ejemplo, la pregunta sobre si $\{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ no tienen relevancia para la identidad del número 2.

Un aspecto interesante del estructuralismo es que permite lecturas tanto realistas como antirrealistas. Shapiro (1997), por ejemplo, mantiene que las estructuras matemáticas son entidades platónicas independientes de los objetos físicos o nuestra actividad mental (estructuralismo *ante rem*). Otras posiciones mantienen que las estructuras dependen de los objetos físicos (estructuralismo *in re*), posición con cierta similitud al aristotelismo, o que las estructuras no tienen realidad alguna al margen de los objetos físicos (estructuralismo *post rem*).

4 Notas ↑

[1] La generalización sobre conceptos y extensiones, presente en la obra de Frege, pertenece a lo que hoy en día se califica como lógica *de orden superior*. Por otra parte, en la actualidad suele entenderse que la lógica de orden superior, es *algo más* que lógica. La cuestión de si la identidad (de primer orden) es un concepto lógico es también un asunto controvertido. Volver al texto

[2] Ver Smith (2007) para una discusión más precisa. El capítulo 9 trata sobre la clasificación de oraciones aritméticas y el capítulo 28 sobre la distinción de Hilbert entre matemática real e ideal. Volver al texto

[3] Existen distintos resultados, todos ellos calificables como *teoremas de incompletud*, véase Smith capítulo 7 para más detalles en este sentido. En el texto empleamos una caracterización muy intuitiva, procurando no faltar a la verdad. Volver al texto

[4] El lógico Gerard Gentzen demostró en 1936 la consistencia de la Aritmética de Peano, aunque este resultado

asume formas de razonamiento más fuertes que la aritmética finitaria (Smith 2007, 217-221). Volver al texto

[5] This neo-intuitionism considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while remaining separated by time as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking, the intuition of the bare two- oneness. This intuition of two-oneness, the basal intuition of mathematics, creates not only the numbers one and two, but also all finite ordinal numbers, inasmuch as one of the elements of the two-oneness may be thought of as a new two-oneness, which process may be repeated indefinitely; this gives rise still further to the smallest infinite ordinal number ω. Finally this basal intuition of mathematics, in which the connected and the separate, the continuous and the discrete are united, gives rise immediately to the intuition of the linear continuum, i. e., of the “between,” which is not exhaustible by the interposition of new units and which therefore can never be thought of as a mere collection of units (Brouwer 1983a, 57). Volver al texto

[6] Ver Priest 2008, c. 6 para una aproximación sencilla a la lógica intuicionista a través de semántica modal de Kripke. Volver al texto

5 Bibliografía ↑

van Atten, M. 2004. *On Brouwer*. London: Wadsworth.

Benacerraf, P. 1965. "What Numbers Could Not Be". *Philosophical Review* Vol. 74, 47–73. Reimpreso en Benacerraf y Putnam 1983, 272–294.

Benacerraf, P. 1973. "Mathematical Truth". *Journal of Philosophy* 70: 661-680. Reimpreso en Benacerraf y Putnam 1983, 403–420.

Benacerraf, P. y Putnam, H. 1983. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge: Cambridge University Press. 2ª Edición (1ª Edición de 1964 por Prentice Hall).

Bernays, P. 1983. "On Platonism in Mathematics". En *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, editado por Benacerraf y Putnam, 258-271. Cambridge: Cambridge University Press. Publicado originalmente en francés en 1935. *L’enseignement in mathématique* 34: 52–59.

Bernays, P. 1967. "Hilbert", en P. Edwards *The Encyclopedia of Philosophy*, New York: McMillan Publishing, 496–504.

Brouwer, L. E. J. 1983a. "Intuitionism and formalism". En *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, editado por Benacerraf y Putnam, 77–89. Publicado originalmente en 1913 *Bulletin of the American Mathematical Society* 20: 81-96.

Brouwer, L. E. J. 1983b. "Consciusness, Philosophy and Mathematics". En *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, editado por Benacerraf y Putnam, 90–96. Cambridge: Cambridge University Press. Publicado originalmente en 1949 *Proceedings from the 10th International Congress of Philosophy*. Amsterdam: North-Holland Publishing co: 1243–9.

Brouwer, L. E. J. 1952. "Historical background, principles and methods of intuitionism". *South African Journal of Science* 49: 139-146.

Blumenthal, L. 1980. *A modern view of geometry*. Dover Publications.

Burgess, J. y Rosen, G. 1997. *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Carnap, R. 1983. "Empiricism, Semantics and Ontology". En *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, editado por Benacerraf y Putnam, 241-257. Publicado originalmente en 1950. *Revue Internatinale du Philosophie* 4: 20–40.

Traducción española: (1981) *La concepción analítica de la Filosofía*, J. Muguerza (ed.) A. Deaño (trad.), Madrid: Alianza Universidad, 400-419.

Coffa, A. 1991. *The semantic tradition from Kant to Carnap*. Cambridge: Cambridge University Press.

Colyvan, M. 2001. *The Indispensability of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Demopoulos, W. 1995. *Frege's Philosophy of Mathematics*. Cambrdige, Mass.: Harvard University Press.

Detlefsen, M. 1986. *Hilbert's Program*. Dordrecht: Reidel.

Dummett, M. 1977. *Elements of Intuitionism*. Oxford: Oxford University Press.

Dummet, M. 1991. *Frege: Philosophy of Mathematics*. Cambrdige, Mass.: Harvard University Press.

Ewald, W. 1996. *From Kant to Hilbert*. Oxford: Oxford University Press.

Field, H. 1980. *Science without Numbers: a defense of nominalism*. Oxford: Blackwell.

van Fraassen, B. C. 1970. *An Introduction to the Philosophy of Time and Space*. New York: Random House.

Frege, G. 1884. *The Foundations of Arithmetic. A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number*, traducido por J.L. Austin. Evanston: Northwestern University Press, 1980. Traducción española: (1972) *Fundamentos de la Aritmética*, traducido por U. Moulines. Barcelona: Laia.

Gödel, K. 1931. "On Formally Undecidable Propositions in Principia Mathematica and Related Systems I". En *From Frege to Gödel*, editado por J. van Heijenoort, 1967, 596-616. Cambridge, Mass.: Harvard University Press. Traducción española: (2006) *Sobre proposiciones formalmente indecibles de los "Principia mathematica" y sistemas afines, I*, M. Garrido, A. García Suárez, L. M. Valdés Villanueva (trad.) Oviedo: KRK.

Goldrei, D. 1996. *Classic Set Theory*. New York: Chapman & Hall.

Hale, B. y Wright, C. 2001. *The Reason's Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Hedman, S. 2004. *A First Course in Logic*. Oxford: OUP (reimpreso con correcciones: 2006).

van Heijenoort, J. 1967. *From Frege to Gödel*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hilbert, D. 1983. "On the Infinite". En *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, editado por Benacerraf y Putnam, 183–201. Publicado originalmente en 1926 *Mathematische Annalen* 95: 161–90.

Lakatos, I. 1967. *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland.

Lavine, S. 1994. *Understanding the Infinite*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press. Traducción española (2005) *Comprendiendo el infinito*, E. Torres Alexander (trad.) Méjico: Fondo de cultura económica.

Leng, M. 2010. *Mathematics and Reality*. Oxford: Oxford University Press.

Maddy, P. 1990. *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Maddy, P. 1997. *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Mancosu, P. 2008. *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford: Oxford University Press.

Dales, H. y G. Oliveri. 1998. *Truth in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Parsons, C. 1980. "Mathematical Intuition". *Proceedings of the Aristotelian Society* 80: 145–168.

Parsons, C. 1983. *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*. Ithaca: Cornell University Press.

Parsons, C. 1990. "The Structuralist View of Mathematical Objects". *Synthese* 84: 303–346.

Platón. 1983. *Diálogos*, vol. II y IV. Madrid: Gredos.

Posy, C. 1992. *Kant's Philosophy of Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Putnam, H. 1983. "Mathematics without Foundations". En En *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, editado por Benacerraf y Putnam, 295–311. Publicado originalmente en 1967 *Journal of Philosophy* 64: 5–22.

Reck, E. y M. Price. 2000. "Structures and Structuralism in Contemporary Philosophy of Mathematics". *Synthese* 125: 341–383.

Resnik, M. 1980. *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca NY: Cornell University Press.

Resnik, M. 1997. *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Clarendon Press.

Shapiro, S. 1997. *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford: Oxford University Press.

Shapiro, S. 2000. *Thinking about mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Shapiro, S. 2005. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Smith, P. 2007. *An Introduction to Gödel's Theorems*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tait, W. 1981. "Finitism". *The Journal of Philosophy* 78: 524–546.

Tait W. 2005. *The Provenance of Pure Reason: Essays in the Philosophy of Mathematics and its History*. Oxford: Oxford University Press.

Wedberg, A. 1955. *Plato's Philosophy of Mathematics*. Stockholm: Almqvist and Wiksell.

Zach, R. 2006. "Hilbert's Program Then and Now". En *Philosophy of Logic (Handbook of the Philosophy of Science, Volume 5)*, editado por D. Jacquette, 411-447. Amsterdam: Elsevier.

Zalabardo, J. L. 2002. *Introducción a la teoría de la lógica*. Madrid: Alianza Editorial.

6 Cómo Citar ↑

Cobreros, Pablo. 2016. "Filosofía de las matemáticas". En Diccionario Interdisciplinar Austral, editado por Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck. URL=http://dia.austral.edu.ar/Filosofía_de_las_matemáticas

7 Derechos de autor ↑

DERECHOS RESERVADOS Diccionario Interdisciplinar Austral © Instituto de Filosofía - Universidad Austral - Claudia E. Vanney - 2016.

ISSN: 2524-941X

8 Agradecimientos ↑

Mi agradecimiento a Sergio Clavero por comentarios a una versión inicial de este artículo y a dos evaluadores del Diccionario Interdisciplinar Austral por correcciones y sugerencias que han ayudado a mejorar esta voz. Gracias finalmente al proyecto *Lógicas no-transitivas* (FFI2013-46451-P) financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España.