Matemáticas y religión

Javier Leach
Modo de citar:
Leach, Javier. 2017. "Matemáticas y religión". En Diccionario Interdisciplinar Austral, editado por Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck. URL=http://dia.austral.edu.ar/Matemáticas_y_religión

***Nota**: El autor de esta Voz falleció inesperadamente el 3 de agosto de 2016 sin poder realizar las últimas revisiones del escrito sugeridas por el editor; como su colega académica de largos años en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid he asumido con gusto esta tarea y agradezco al editor el haberme dado las facilidades para llevarla a cabo. Inés M. Gómez-Chacón.*

En esta voz se describe la relación entre la matemática y la religión desde dos posturas filosóficas distintas. Una postura niega el conocimiento metafísico y religioso y se basa exclusivamente en el conocimiento empírico y matemático. La otra admite, además del conocimiento empírico y matemático, también otros tipos de conocimiento y de lenguaje entre los cuales se encuentran el metafísico y religioso.

Estas dos posturas han evolucionado históricamente. La voz comenzará describiendo tres periodos históricos a lo largo de los cuales estas dos posturas han ido cobrando su forma actual. A continuación estudiará la relación actual entre los lenguajes mentales de la matemática y los lenguajes reales de las ciencias empíricas. La voz terminará describiendo la relación actual entre la matemática y la religión. Para describir esa relación interdisciplinar se estudiarán distintos tipos de lenguaje: los lenguajes públicos de la matemática y las ciencias empíricas, y los lenguajes personales y comunitarios de la metafísica y la religión.

1 Tres periodos históricos en las relaciones entre las matemáticas y la religión ↑

Los tres periodos históricos en los que se han ido formando las posturas filosóficas actuales en relación con las matemáticas, la metafísica y la religión, corresponden a tres momentos importantes en la evolución de la matemática.

1.1 Primer período histórico: la racionalidad deductiva en la matemática y en la metafísica ↑

En este primer período histórico, que comenzó en el tiempo de la Grecia de Pitágoras (ca. 569 aC - ca. 475 aC) y Euclides (ca. 325 aC - ca. 265 aC), las matemáticas utilizan por primera vez la racionalidad deductiva para demostrar teoremas. Anteriormente a la época griega, ya se conocen varios tipos de algoritmos que describen relaciones matemáticas en Egipto, India, China y Babilonia, pero la demostración deductiva de teoremas matemáticos, tales como el teorema de Pitágoras o los teoremas que aparecen en los *Elementos* de Euclides, todavía no se había desarrollado. A partir de las matemáticas griegas, la racionalidad deductiva se incorporó como una característica fundamental del lenguaje matemático.

Al hacer de las matemáticas una ciencia deductiva, los griegos fijaban ciertos enunciados tomados como intuitivamente claros a partir de los cuales deducían los enunciados de los teoremas matemáticos. El ejemplo más significativo de esta estabilidad estructural es el tratado de matemáticas de Euclides titulado los Elementos. Aquí encontramos un compendio de demostraciones de teoremas aritméticos y geométricos deducidos a partir de axiomas y principios elementales. Los Elementos de Euclides sirvieron durante siglos como texto básico de matemáticas. De hecho, hasta el siglo XIX se pensó que la geometría que se deduce de los axiomas de Euclides era la única posible.

Actualmente sabemos por los teoremas de incompletitud que no existe en sistema finito de axiomas del cual podamos deducir toda la aritmética tal como se pretende en los Elementos.

Al mismo tiempo que la matemática griega desarrollaba su capacidad deductiva, Aristóteles (384 aC - 322 aC) utilizaba un método lógico-deductivo en su metafísica. Por ejemplo, en el libro 12 de su Metafísica, Aristóteles demuestra por deducción la existencia del motor 'que mueve sin ser movido'. La demostración de Aristóteles fue tomada de nuevo por Tomás de Aquino (1224/1225 - 1274) como una de las vías para mostrar la existencia de Dios como motor del Universo, que mueve sin ser movido. El motor inmóvil es la causa del movimiento, pero, a diferencia de otras causas, que al mover a los otros ellas mismas se mueven, el motor 'que mueve sin ser movido' no se mueve cuando mueve a los otros.

Sin embargo, la dificultad para aceptar el valor de esta demostración metafísica desde un punto de vista analítico-científico, no se encuentra tanto en la corrección de la argumentación, sino en la aceptación de la verdad de las premisas de la argumentación. Una vez que se acepta la validez de las premisas, es fácil comprobar que desde el punto de vista de la lógica clásica, la argumentación es correcta, pues de la validez lógica de las premisas se llega a la validez lógica de la conclusión. Y la aceptación de la verdad de un enunciado implica la aceptación de su validez lógica. Los que no admiten estas argumentaciones generalmente lo hacen porque no admiten la validez de las premisas como principios intuitivos verdaderos y su relación con las formas de causalidad inherentes al sistema pensamiento científico aristotélico.

1.1.1 La Edad Media ↑

La herencia que nos dejaron los griegos por escrito podría haberse perdido, si no hubiésemos contado con estudiosos romanos y árabes que rescataron algunos de estos materiales. Tras el rescate, muchos materiales emergieron de nuevo en la Europa del siglo XII, estimulando, aproximadamente quince siglos más tarde, un renacimiento de la investigación matemática y metafísica. En el ínterin, sin embargo, se realizaron contribuciones matemáticas en China y la India, y estas contribuciones comenzaron a conocerse en el contexto de la cultura islámica.

En particular, este desarrollo surgió en Bagdad alrededor del año 800 bajo la égida de Harún al-Rashid, quinto califa de la dinastía Abbasí. Dicho califa invitó a académicos de diversas regiones a acudir a Bagdad para dedicarse a la investigación científica. Desde la India llegaron tres contribuciones significativas a la nueva etapa de la matemática: el sistema decimal, los números negativos y el cero. También, en este momento los Elementos de Euclides fueron traducidos al árabe.

1.2 Segundo periodo histórico: La matemática como lenguaje de la ciencia moderna, el racionalismo y el empirismo filosófico ↑

En el segundo periodo, que comenzó en la Europa del siglo XVII, las matemáticas adquieren la categoría de lenguaje de la ciencia. Matemáticos como Galileo Galilei (1564 -1642), René Descartes (1596 - 1650), Isaac Newton (1643 - 1727) y Gottfried Leibniz (1646 - 1716) iniciaron este periodo al utilizar las matemáticas como lenguaje de la física, expresando sus observaciones mediante fórmulas matemáticas. La física moderna, iniciada por estos autores, se diferencia de la física aristotélica sobre todo debido a la formulación matemática de las leyes de la naturaleza. Fueron pioneras las descripciones matemáticas que Galileo hizo de sus observaciones físicas y las descripciones matemáticas de las leyes de la física y la astronomía realizadas por Newton en el *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*.

1.2.1 Unificación de las causas ↑

Galileo, nativo de Pisa, Italia, es famoso por utilizar instrumentos científicos para observar la naturaleza y describir sus observaciones en lenguaje matemático. Cuando realizaba sus mediciones cuantitativas observando la caída, el balanceo o el desplazamiento de objetos y las expresaba en lenguaje matemático, Galileo excluía la diferencia entre las causas material, formal, eficiente y final, tal como las concibió Aristóteles. En efecto, con el uso del lenguaje matemático, lo que Galileo proponía con sus explicaciones de los fenómenos físicos tenía el efecto unificar el lenguaje con el que se refería a los diversos tipos de causas. La capacidad de describir las relaciones causa-efecto está precisamente en el corazón de la ciencia. Este nuevo enfoque de la ciencia rehusaba los discursos acerca de las causas finales, buscando sólo las relaciones causales directas que se pueden expresar mediante una fórmula matemática.

1.2.2 Autonomía de la ciencia moderna ↑

La autonomía de la ciencia moderna es una consecuencia del método de observación empírico y de la formulación matemática. El conocimiento de las leyes de la naturaleza ya no depende de la autoridad filosófica o religiosa, sino sólo de la observación metódica de la naturaleza y de la formulación matemática de las leyes observadas.

Históricamente los cambios en la visión científica del mundo siempre han afectado a los puntos de vista religiosos del mundo. Sin embargo, el cambio que se produjo con la aparición de la ciencia moderna fue especialmente importante porque la ciencia moderna es, por su propia metodología, independiente del conocimiento religioso. Desde la época moderna, la autonomía de la ciencia ha dado lugar a una nueva relación entre la visión científica del mundo y la visión religiosa. Esta relación ha sido en ocasiones conflictiva, pero en otras ocasiones ha sido un factor de encuentro y mutua interacción.

Los descubrimientos de Galileo marcan una ruptura entre el conocimiento causal del mundo y el conocimiento religioso. Con esta ruptura la ciencia alcanzó su autonomía. Sus únicas autoridades fueron, a partir de ahora, sus propias observaciones y sus mediciones cuantitativas. Las verdades científicas se expresaron en formulaciones matemáticas que intentaban describir las leyes de la naturaleza. Esta unión entre observación científica y lenguaje matemático se ha vivido sin embargo desde entonces en una continua tensión dentro de la ciencia.

El trabajo de Galileo fue sólo un primer paso en la formulación matemática de las observaciones físicas. Otros científicos siguieron en este camino. El inglés Isaac Newton finalmente materializó las leyes físicas más básicas en un conjunto sencillo y claro de formulaciones matemáticas.

1.2.3 Racionalismo y empirismo filosóficos ↑

El uso de las matemáticas como el lenguaje de la ciencia trajo una idea mecanicista del mundo y su expresión en el lenguaje y conocimiento científico. La ciencia moderna se distingue por la definición de las causas científicas a través de fórmulas matemáticas. Por ejemplo, la fórmula $F = m \bullet a$ representa que, por una masa dada m, un aumento de la fuerza es la causa de un aumento de la aceleración. Cuando se expresan causas mediante fórmulas matemáticas, la ciencia moderna estandariza, reduce y mecaniza las causas. Con la mecanización de las causas se produjo la unificación de las causas, y el racionalismo de la matemática se incorporó al lenguaje filosófico y metafísico en el siglo XVII. Para los racionalistas (y de manera similar para los empiristas como Hume) las causas pueden ser expresadas en un lenguaje racional-formal. En este contexto el racionalismo puede ser creyente religioso o no creyente religioso como explicaremos más adelante.

1.2.4 Nuevos argumentos metafísicos ↑

En la era moderna de las matemáticas tres nuevos tipos de argumentos metafísicos alcanzaron prominencia: el principio de razón suficiente, la creencia en el determinismo causal y el rechazo de la metafísica. Paradójicamente, el rechazo de la metafísica se convierte él mismo en metafísica, cuando este rechazo se justifica con argumentos acerca de las últimas causas de las cosas, a las que la ciencia empírica no tiene acceso.

1.2.5 El principio de razón suficiente y la creencia en el determinismo ↑

El principio de razón suficiente atribuido en su formulación actual a G. Leibniz (1646 -1716) establece que ningún fenómeno se produce en la naturaleza sin una razón suficiente. El principio de razón suficiente es equivalente a la afirmación de que un ser que conoce todas las causas será capaz de explicar por qué ocurre todo lo que está ocurriendo. Dado que la ciencia moderna entiende por causa una razón matemática, el principio de razón suficiente parece implicar un fatalismo determinista matemático.

El principio de razón suficiente supone que todos los hechos pueden explicarse. Esta afirmación niega la posibilidad de libre elección. Con el fin de salvar la libertad del ser humano, Leibniz, ejemplo de un creyente en Dios racionalista, distingue entre el conocimiento limitado del hombre que le permite tomar decisiones libremente, ya que no sabe todas las causas de las cosas, y el conocimiento ilimitado de Dios que conoce todas las causas o razones.

Para Leibniz nada en el mundo está indeterminado, todo sigue un plan que está claro en la mente de Dios, y Dios ha creado el mejor mundo posible. Leibniz creía que todos los aspectos, tanto naturales como sobrenaturales, del mundo están relacionados por vínculos que pueden ser descubiertos por métodos racionales. Desde esta perspectiva Leibniz pensaba que, para discutir cualquier problema con un hombre de 'buena voluntad' era suficiente formalizar el problema y que ambos dijeran "calculemos". Estos cálculos tenían que estar apoyados por algún tipo de lógica. A mediados del siglo XVII el desarrollo de la lógica formal estaba básicamente como la habían dejado los griegos. Como Leibniz sostiene la idea de que nada ocurre en la naturaleza sin una razón suficiente para explicar lo que ha ocurrido, el mundo sigue un plan armónico que preexiste en la mente de Dios. Dios sigue este plan al crear el mejor de los mundos posibles. Todos los aspectos naturales y sobrenaturales de este mundo leibniziano pueden ser comprendidos por métodos racionales de acuerdo con el modelo de las matemáticas.

El determinismo causal es otra consecuencia de la creencia metafísica de que todo tiene una explicación determinada matemáticamente. El que todo tenga una explicación determinada matemáticamente implica que todo tiene una causa o una razón de ser. Del mismo modo podemos decir que, si todo tiene una explicación determinada matemáticamente, todo es deducible a partir de ciertas proposiciones básicas. Un representante típico del determinismo causal fue Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Laplace creía en el determinismo causal, mantenía que al igual que las leyes de Newton podían predecir fenómenos astronómicos, todos los fenómenos podrían predecirse utilizando la ubicación y cantidad de movimiento de los átomos que componen la materia. Laplace explicó su punto de vista determinista diciendo que si hubiera un demonio (o un ser muy inteligente) que conociera la posición y el momento de todos los átomos del universo en un momento dado, este demonio sería capaz de predecir todos los eventos futuros utilizando las ecuaciones de Newton.

1.2.6 El rechazo de la metafísica y la religión ↑

La tercera consecuencia que algunos filósofos derivaron de la creencia de que todo tiene una explicación matemática es el rechazo del conocimiento metafísico y religioso. Fue el filósofo David Hume (1711 – 1776) quien hizo la afirmación más explícita desde el principio en su ensayo de 1748, *An Enquiry Concerning Human Understanding* (Una investigación acerca del conocimiento humano). El ensayo es un ataque contra cualquier tipo de pensamiento metafísico. También es un manifiesto a favor de la ciencia empírica moderna como la única verdadera forma de conocimiento. Negó la existencia del nexo causal lo cual llevó a Kant a reconstruirla incorporándola en su sistema idealista.

Podemos decir que el racionalismo científico fue consecuencia del uso específico del lenguaje y del pensamiento matemático, propio de los siglos XVIII y XIX. Como veremos, las matemáticas del siglo XX se abrieron a nuevas perspectivas sobre la racionalidad.

El hecho de negar la posibilidad de la metafísica es en sí mismo un acto metafísico. Las actividades metafísicas se refieren al conocimiento de lo esencial, lo que finalmente importa, lo definitivo. A lo largo de toda la historia cultural de la humanidad ha aparecido de diferentes maneras la pregunta metafísica sobre la posibilidad de conocer lo esencial, el ser de las cosas en su origen, esencia y último destino. Es una pregunta que cobra distintas formas en todas las culturas y todas las religiones.

La observación experimental, medida, cuantificada y formulada con precisión formal y metódica, es el centro de la ciencia moderna. El conocimiento experimental de los hechos y el razonamiento matemático aparecen en las raíces del conocimiento científico. Estos hechos dejan abierta la pregunta metafísica: Aparte de la experiencia científica, ¿existe también una percepción metafísica de la realidad, del ser específico de cada cosa y de todo lo existente en su totalidad? ¿Agota el conocimiento empírico y racional todo el conocimiento humano?

1.3 Tercer período histórico: lenguaje formal intrínsecamente limitado ↑

En el tercer período, que comenzó a finales del siglo XIX, se formalizó el lenguaje matemático. Gracias al trabajo de matemáticos, entre los que están Gottlob Frege (1848 - 1925), Georg Cantor (1845 - 1918), David Hilbert (1862 - 1943), Kurt Gödel (1906 - 1978), Alfred Tarski (1902 - 1983), Alan Turing (1912 - 1954) y Alonzo Church (1903 - 1995), que hicieron posible esta formalización, se pudo deducir consecuencias muy importantes en relación con el valor de verdad de las certezas matemáticas y las limitaciones intrínsecas de los métodos matemáticos.

Hasta el siglo XIX los matemáticos habían utilizado diversos tipos de lenguaje para expresarse. Una última frontera, todavía no alcanzada, era crear un sistema de lenguaje formal completo que tuviera suficientes signos y reglas para poder expresar cualquier relación matemática posible, dentro de un sistema coherente y sin contradicciones. La búsqueda de un lenguaje universal que sirva para expresar toda la matemática ha estado desde siempre presente en el corazón de la ciencia. La formulación de este lenguaje fue un logro debido al matemático alemán G. Frege. Frege publicó su sistema titulándolo *Begriffsschrift* (Escritura de conceptos) en 1879, agregando el subtítulo de "Un lenguaje de fórmulas para el pensamiento puro, a semejanza de la aritmética". En este sistema, Frege presentaba a las matemáticas como una superestructura que surge del fundamento de la lógica formal.

1.3.1 Nuevas perspectivas filosóficas ↑

La formalización del lenguaje matemático ha tenido dos consecuencias filosóficas importantes. En primer lugar, ha convertido el mismo lenguaje matemático en un objeto de la matemática y ha permitido estudiar el propio lenguaje matemático mediante el uso de métodos matemáticos, la llamada meta-matemática. Al igual que la matemática demuestra teoremas sobre números, líneas, rectas, planos, figuras geométricas y otros objetos matemáticos, ahora puede demostrar teoremas acerca de los mismos enunciados matemáticos, acerca de su significado y de su validez. Esto es un auto-conocimiento matemático de la matemática. Este auto-conocimiento ha tenido consecuencias filosóficas porque ha permitido evaluar de un modo matemático la certeza de los enunciados matemáticos.

En el pasado la certeza se basaba en intuiciones y en demostraciones. Pero la consistencia de algunas viejas certezas empezó a ponerse en duda. La búsqueda de certeza llevó a crear un sistema formal que evitara las paradojas. Este sistema pretendía tener una consistencia completa. Esta búsqueda de la certeza en las matemáticas tenía, por supuesto, un trasfondo que la relacionaba necesariamente con la metafísica. Uno de sus objetivos era encontrar una especie de verdad absoluta, que no cambia.

En segundo lugar, otra consecuencia de tipo tecnológico ha sido verdaderamente revolucionaria para nuestras vidas prácticas en el mundo moderno. La formalización del lenguaje matemático ha producido una automatización de las demostraciones matemáticas. Esta automatización ha conectado la mente humana con el ordenador. La máquina de Turing y el cálculo lambda de Church han formalizado los procesos mecánicos y han permitido el estudio matemático de los procesos de deducción matemática. La utilización pública, global y transcultural del lenguaje matemático, ha cobrado actualmente especial valor tecnológico con el uso de lenguajes formales en la informática y la IA, dando lugar a una nueva cultura tecnológica global impulsada por la comunicación masiva de información a través de Internet.

1.3.2 La lógica y la intuición ↑

El uso de la matemática como lenguaje de la ciencia moderna presupone que hay una correspondencia entre la intuición matemática y la intuición empírica. Pero, como referiremos más adelante, citando al premio nobel en física Eugene Paul Wigner, la matemática no es sólo lógica, es lógica e intuición. Y no es sólo intuición matemática, pues la intuición matemática, como han puesto de relieve desde otros campos, está relacionada con la intuición física. La lógica sola es la ciencia de la deducción, y un sueño de algunos filósofos de la matemática llamados logicistas fue reducir toda la matemática a puras deducciones a partir de principios lógicos. Sin embargo, la reducción de la matemática a distintos puntos de vista puramente de deducciones lógicas, sin la restricción de los axiomas o enunciados que expresan el contenido intuitivo sobre el que actúan las deducciones, lleva a paradojas que equivalen a contradicciones. Un ejemplo es la teoría ingenua de conjuntos y la paradoja de Russell.

1.3.3 La paradoja de Russell ↑

Hacia finales del siglo XIX se intenta unificar la matemática y la lógica, reduciendo toda la matemática a puros formalismos lógicos. Los primeros en introducir los lenguajes formales fueron Peano y Frege con la intención de hacer más rigurosas las demostraciones matemáticas, es decir, de acrecentar la certidumbre de las conclusiones de los razonamientos matemáticos. La gran tentativa de la formalización efectiva de las matemáticas fueron los *Principia Mathematica* de Russel y Whitehead, de acuerdo con la lógica formal de Frege y de acuerdo con la teoría de conjuntos ingenua, no axiomática.

Al principio, la teoría de conjuntos parecía ser casi lo mismo que la lógica. En consecuencia, parecía verosímil que la conjunción lógica-teórica de conjuntos pudiera servir de fundamentación para la totalidad de las matemáticas. Y dado que la totalidad de las matemáticas puede ser reducida a la teoría de conjuntos, todo cuanto se requiere considerar es la fundamentación de la teoría de conjuntos. Sin embargo, fue el mismo Russel quien descubrió que la noción de conjunto, tan transparente en apariencia, contenía trampas insospechadas. Las controversias de finales del siglo XIX y principios del XX se suscitaron a causa del descubrimiento de contradicciones en la teoría de conjuntos. La paradoja de Russel fue una consecuencia de estas búsquedas.

La paradoja de Russell aparece cuando intentamos definir un conjunto R al que pertenecen como elementos todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos como elementos. Esa frase puede parecer un galimatías pero es perfectamente lógica y se entiende fácilmente cuando pensamos con mucha naturalidad en cualquier conjunto que no se contiene a sí mismo como elemento, por ejemplo, si consideramos el conjunto de las mujeres, cualquier mujer es un elemento de dicho conjunto de las mujeres, pero el mismo conjunto de las mujeres no es un elemento del conjunto de las mujeres. Si aceptásemos como válida la definición de R, el conjunto de las mujeres sería uno de los elementos de R.

Podemos, de ese modo, pensar con toda naturalidad en un conjunto R que contenga a todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos. Ese conjunto contendría muchos otros conjuntos, por ejemplo como hemos visto contendría al conjunto de todas las mujeres. Además ese conjunto R puede ser definido en la lógica formal a la que Frege quería reducir toda la matemática.

Pero una vez definido el conjunto R queda sin responder la pregunta siguiente: ¿Pertenece el conjunto R a sí mismo como elemento? La respuesta a esta pregunta nos lleva a una contradicción, pues si respondemos afirmativamente a la pregunta, nos vemos obligados a responder negativamente y si respondemos negativamente nos vemos obligados a responder afirmativamente. Russel informó a Frege de su ejemplo.

La paradoja de Russell se basaba en una formalización ingenua, no axiomática, de los conjuntos. Es Ernst Zermelo (1871 - 1953) quien desarrolló una teoría axiomática, no ingenua, de conjuntos. Se suele decir que la teoría axiomática de Zermelo no es ingenua, porque en ella un conjunto sólo puede existir si satisface ciertos axiomas. Así, en teoría axiomática de conjuntos, se considera que un conjunto es sencillamente un objeto no definido que satisface a una lista de axiomas dados, en este caso, la construcción del conjunto no nos conduciría a la paradoja de Russel. La teoría axiomática de conjuntos de Zermelo no se deduce sólo de la lógica formal de Frege, sino de esa lógica y de ciertos axiomas. Es de destacar que el perfeccionamiento realizado al sistema axiomático de Zermelo, conocido como axiomas de Zermelo-Fraenkel, es un sistema resultante con diez axiomas, el más usado para la teoría axiomática de conjuntos.

1.3.4 Preguntas filosóficas sobre los sistemas matemáticos ↑

Cuando la matemática moderna comenzó a estudiar la naturaleza de sus propios sistemas, se vio obligada a reflexionar sobre tres preguntas que aparecieron con nueva fuerza: ¿Son los sistemas matemáticos consistentes? ¿Son completos, de tal modo que incluyan todas las posibilidades? Y por último, ¿pueden los sistemas matemáticos garantizar una decisión acerca de la validez de cualquiera de sus fórmulas?

1.3.5 Metamatemática ↑

Sobre la base de los que le habían precedido, el matemático alemán Hilbert presentó la idea de la metamatemática. Fue acuñada por él con clara alusión a la clásica palabra aristotélica “metafísica”. En Hilbert la metamatemática era sinónimo de teoría de la demostración, pero así como esta denominación ha caído en desuso la palabra metamatemática está en plena vigencia actualmente, aunque no siempre con el mismo sentido (Dou 1970; Dunmore 1992; Gillies 1992; Hilbert 1928; Kleene 1952).

La metamatemática es la ciencia que estudia desde fuera los sistemas formales, que son por consiguiente la materia u objeto de aquélla, y en esto hay unanimidad. Pero se discrepa en los métodos propios de la metamatemática, pues para algunos son los mismos de la matemática sin restricción alguna, es decir, admitiendo por ejemplo la inducción transfinita con el empleo del infinito como un todo. Ahora bien, si se pretende fundamentar la matemática, como intentó Hilbert, es obvio que entonces hay que emplear únicamente métodos finitarios, pues de lo contrario habría que acudir a una metametamatemática.

El objetivo del programa meta-matemático de Hilbert era muy ambicioso. Se esperaba encontrar un último lenguaje formal y universal. Con tal lenguaje se pretendía que los matemáticos pudieran finalmente demostrar que las teorías matemáticas son consistentes (sin contradicciones), completas (se pueden deducir todas las fórmulas de la teoría a partir de los axiomas) y semánticamente decidibles (hay un procedimiento para decidir la verdad de cualquier fórmula de una teoría). Como veremos a continuación, esta pretensión del lenguaje formal matemático fue socavándose al mismo tiempo que se intentaba construir la teoría.

El proyecto meta-matemático de Hilbert comenzó a debilitarse con el teorema de incompletitud de la aritmética. Sin embargo, la incompletitud no destruye la hipótesis de que nuestro pensamiento es consistente. Fue precisamente la hipótesis de la consistencia la que le llevó a Gödel a su conclusión, arrojando extraordinaria luz sobre las cuestiones de consistencia, completitud y decibilidad, mediante el proceso de aritmetización de la metamatemática efectuado por Gödel mediante la numeración que lleva su nombre. Es claro que Hilbert esperaba que se pudiera construir un sistema formal que formalizara la aritmética que fuera simultáneamente consistente y completo; y estimaba que ello constituiría una suficiente fundamentación absoluta de la incontrovertible verdad de los métodos y teoremas de la aritmética. El teorema de incompletitud de Gödel implica que el sistema formal S no es simultáneamente consistente y completo, y hace que la pretensión de Hilbert sea muy probablemente imposible, y caso de que fuera posible ha de ser extraordinariamente difícil de demostrar. Con su teorema de incompletitud establece que para todo sistema axiomático recursivo auto-consistente lo suficientemente poderoso como para describir la aritmética de los números naturales (la aritmética de Peano), existen proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Gödel demostró que no podemos demostrar la consistencia de la aritmética desde dentro de la aritmética. Tenemos que salir fuera del sistema de la aritmética y demostrar la consistencia de la aritmética desde un meta-sistema externo, que presuponemos que opera de un modo consistente.

Las conclusiones de Gödel produjeron una crisis en el programa meta-matemático de Hilbert. Como resultado de esta crisis las matemáticas tuvieron que reevaluarse. ¿Es posible tener un único sistema matemático, o estaba el proyecto de Hilbert destinado a toparse con la realidad de una pluralidad de lenguajes y sistemas matemáticos?

1.3.6 La formalización de los procesos efectivos ↑

En un artículo (Turing 1936-37) publicado en 1936, Alan Turing presentó su formalización exacta del concepto de "método efectivo" que se llama la máquina de Turing. Del nombre de "máquina de Turing" viene el nombre de procesos mecánicos que también se da a los procesos efectivos. Alonzo Church había presentado otra formalización diferente de los algoritmos algunos meses antes que Turing. La formalización de Church se llama cálculo lambda. La formalización de la máquina de Turing y el cálculo lambda resultaron ser equivalentes en el sentido de que ambos describen el mismo conjunto de funciones algorítmicas efectivas.

Una vez establecido formalmente el mecanismo de su máquina, Turing obtuvo un resultado sorprendente que fortaleció el teorema de incompletitud de Gödel. Turing demostró que no es posible decidir en todos los casos si un programa dado se detendrá o no. Razonando con la máquina de Turing, una versión del teorema de incompletitud de Gödel puede probarse.

Las ideas de Church y de Turing pertenecen al núcleo de la computación teórica actual. Además, la aplicabilidad de la informática ha afectado de manera decisiva al desarrollo de la dimensión aplicada de las ciencias formales. Se han puesto de relieve las dimensiones aplicadas de los lenguajes y los modelos formales, tales como: el pragmatismo, la experimentación, la aplicabilidad y eficacia. Esto ha llevado al uso de pluralidad de lógicas, adecuado para diversos objetivos. La existencia de una pluralidad de lógicas abre nuevas perspectivas para el lenguaje científico, ya que cada una de ellas refleja una dimensión parcial de razonamiento (Gabbay, Hogger y Robinson 1996 y Gabbay y Guenthner 2011). Entre ellas podríamos mencionar: la lógica modal, lógica difusa o borrosa (*Fuzzy Logic*), la lógica temporal, la lógica multievaluada, la lógica lineal, la lógica intuitiva, la teoría de tipo constructivo, la lógica no monótona etc. Cada una refleja una dimensión del razonamiento, por ejemplo la lógica 'fuzzy' (Zadeh 1965) que permite el razonamiento con enunciados cuya validez está sujeta a las leyes de la probabilidad, o como la lógica modal (Emerson 1990) que permite operar con operadores modales como 'es necesario que…', 'es posible que…'.

1.3.7 El riesgo de cometer errores ↑

Los teoremas de incompletitud y de indecidibilidad nos enfrentan a riesgos en el mismo contexto de los lenguajes formales, en el que podemos ejercer mayor control sobre nuestro lenguaje y nuestro conocimiento y precisamente debido a que este riesgo de cometer errores se basa en la naturaleza misma de los procesos formales. No existe una explicación formal que nos diga cómo tenemos que asumir este riesgo.

1.3.8 Ciencias formales, metafísica y religión ↑

El razonamiento formal es público y trasciende todos los lenguajes y todos los niveles de conocimiento humano, incluyendo el metafísico y el religioso. Entre las ciencias formales y la metafísica existe una relación paradójica. Por un lado, las ciencias formales y la metafísica son dos dimensiones del conocimiento humano con diferencias considerables entre las dos. Por otro lado, hay algunas similitudes entre la metafísica y las ciencias formales.

La metafísica es aquel conocimiento que tiene por objeto la realidad que está más allá de la realidad material que percibimos a través de los sentidos, la realidad invisible como condición de la realidad material que percibimos. Si las ciencias se ocupan del estudio de la realidad material, la metafísica, sin descartar los resultados científicos, estudia una realidad que está más allá de lo que podemos captar con los sentidos y que sólo puede conseguirse con el uso exclusivo de la razón.

¿Por qué el mundo es inteligible? ¿Por qué existe el mundo? ¿Por qué existe el ser y no la nada? ¿Qué es la realidad en su conjunto? ¿Por qué es la realidad inteligible? ¿Por qué la realidad puede expresarse o “contenerse” en el lenguaje? Estas son preguntas metafísicas porque se preguntan por las razones y causas de la existencia del mundo. Su campo de reflexión comprende pues, los aspectos de la realidad que son inaccesibles a la investigación científica, requiere de una trans-disciplinariedad, ya que se refiere a la realidad como un todo. Pues no sólo se pregunta por el origen, sino por la constitución y la interrelación de todo lo que “es”, es decir, de la realidad en su totalidad.

La ciencia asume, da por supuesto, que la realidad es inteligible, y estudia las leyes que rigen la inteligibilidad de la realidad, pero deja abierta la pregunta acerca de por qué es la realidad inteligible. Algunas ciencias de la naturaleza, como la neurociencia, estudian las leyes causales de la inteligibilidad, pero todas ellas asumen como una hipótesis no demostrada que la realidad es inteligible. La metafísica se plantea la pregunta, ¿por qué es la realidad inteligible? ¿Cómo es que la mente humana puede captar (o construir) esa inteligibilidad?

En las historias anteriores de Hilbert y Gödel, hemos visto cómo la incompletitud de la aritmética ha socavado el ideal mecanicista de un único lenguaje formal y ha llevado a la creación de sistemas abiertos. A continuación vemos cómo los nuevos conocimientos acerca de los algoritmos mecánicos (es decir, acerca de los procedimientos programables y computables de cálculo), han revelado que algunos problemas de las matemáticas simplemente no pueden ser decididos en un sistema fijo. Este es otro golpe al ideal de crear un único sistema universal válido para toda la matemática.

Hoy en día, la pluralidad de sistemas formales crece actualmente en número y en extensión. Sabemos que no podemos construir un sistema formal único que abarque a todos los sistemas y que permita controlarlos formalmente. Esta situación nos lleva a la afirmación metafísica de que el último control de los sistemas formales es externo a esos mismos sistemas formales. Necesitamos otros lenguajes no formales que nos permitan entender y controlar los sistemas formales.

1.3.9 El problema de la decisión ↑

El problema de la decisión, conocido en alemán como el *Entscheidungsproblem*, ha sido uno de los problemas matemáticos más importantes durante la primera mitad del siglo XX. El problema de la decisión pretendía demostrar que bajo ciertas condiciones lógicas (es decir, usando la lógica de primer orden) podíamos decidir mecánicamente, usando un algoritmo, si una fórmula dada es un teorema. Nos enfrentamos con un conjunto infinito de elementos y nos preguntamos si un elemento dado pertenece al conjunto o no. La idea de un proceso mecánico para el que hay un procedimiento algorítmico estaba ya presente en los cálculos informales que ya se realizaban desde tiempos antiguos. Lo que faltó hasta el siglo XX fue un lenguaje formal matemático con el que se pudieran escribir las instrucciones de dicho cálculo. Este lenguaje fue pensado aproximadamente al mismo tiempo por Alan Turing y Alonzo Church.

Los resultados de Church-Turing fueron un hito histórico comparable a la formalización de la lógica de primer orden de Frege. La gran pregunta que dejaron abierta fue la siguiente: Dado un programa arbitrario y un input arbitrario, ¿puede decidirse si después de un determinado período el programa devolvería una solución o no se detendría nunca, sin devolver ninguna solución? La respuesta fue que esta pregunta no puede responderse. La máquina de Turing confirmó la indecidibilidad matemática, y fortaleció así el teorema de incompletitud de Gödel.

Gracias a Church y Turing, la informática ha influido de un modo definitivo en el desarrollo de las ciencias aplicadas. Los modelos formales matemáticos tienen en cuenta, más que nunca en el pasado, aspectos prácticos como la experimentación, la aplicabilidad y la eficacia. Para lograr esto los científicos de la computación han diseñado una pluralidad de lógicas adecuadas, en cada caso, al efecto buscado. Esta pluralidad de lógicas (Gabbay, Hogger y Robinson 1996 y Gabbay y Guenthner 2011) abre nuevas perspectivas para los lenguajes científicos, al reflejar cada una de ellas distintos aspectos de la realidad deductiva y una dimensión parcial del razonamiento humano. Además, al aplicar esta formalización parcial, la informática también descubre nuevas propiedades probabilísticas de los algoritmos, es decir, irrupciones aleatorias en el algoritmo y herramientas probabilísticas básicas que son recurrentes en aplicaciones algorítmicas (Ausiello et al. 2013; Harel 1992; Motwani y Raghvan 1995).

Por último, el pluralismo y la indecidibilidad nos obligan a admitir la creciente complejidad de la lógica y los sistemas formales. Cada vez más, estamos intentando encontrar soluciones diferentes para el mismo problema. Hoy en día, el reto es descubrir criterios adecuados que determinen cuáles son las mejores soluciones. Lo mejor quizás es lo más simple, pero en la aplicación de la matemática formal, estamos lidiando con una creciente complejidad de programas informáticos mediante los que tratamos de procesar los datos que proporcionan las ciencias empíricas.

1.3.10 Pluralismo matemático ↑

Construida a partir de la intuición y la lógica, la matemática es el resultado de un largo proceso histórico en el que tanto la intuición matemática como la deducción lógica se han ido desarrollando y perfeccionando.

La historia del lenguaje matemático es la narración del progresivo desvelamiento del significado de un lenguaje particularmente verdadero y exacto. La intuición y la lógica deductiva son dos componentes básicas del significado de dicho lenguaje (Byers 2007; Courant y Robbins 1941).

Gracias a los estudios sobre los fundamentos de las matemáticas de finales del siglo XIX y de la primera mitad del siglo XX, hemos logrado un mejor conocimiento del valor cognitivo de las matemáticas. Junto con el programa de Hilbert para asentar los fundamentos de las matemáticas, también fue importante el intento alternativo constructivista-intuicionista de fundamentar las matemáticas, que se encuentra sobre todo en los escritos del matemático intuicionista L. E. J. Brouwer (1881 - 1966).

El intuicionismo de Brower niega el principio lógico clásico del tercero excluido, según el cual todo enunciado bien construido es o bien verdadero o bien falso, y muestra que, además de la fundamentación clásica de Hilbert, puede haber otros puntos de vista sobre la verdad de los objetos matemáticos. La discusión sobre las distintas escuelas de fundamentación de la matemática muestra que no hay ningún argumento lógico que permita tomar una decisión con respecto a si un punto de vista es mejor que el otro (Davis y Hersh 1981). Por otra parte se confirmó este pluralismo matemático, incluso dentro del punto de vista clásico, cuando K. Gödel demostró que el programa de Hilbert para la fundación de las matemáticas era imposible de llevar a cabo.

Es importante llamar la atención sobre el punto de que, aunque los sistemas matemáticos son plurales, el pluralismo de los sistemas no niega sino que refuerza la importancia de la consistencia en el interior de cada uno de los sistemas matemáticos. La matemática es plural, pero cada uno de sus sistemas debe ser consistente. En la actualidad, aceptamos la consistencia tal vez como el punto final y la inevitable ligada al apoyo del pensamiento lógico, y construimos una multitud de sistemas razonables alrededor de este núcleo lógico. Sin embargo, como veremos más adelante, actualmente se investiga también en sistemas paraconsistentes que no son lógicamente consistentes pero que tienen valor tecnológico. La lógica paraconsistente es un campo de la lógica que se ocupa del estudio y desarrollo de sistemas lógicos paraconsistentes (o “tolerantes a la inconsistencia”) (Béziau 2000). Este tipo de lógica ha abierto nuevas posibilidades para la ciencia al tener este instrumento lógico para articular y manejar lógicamente contradicciones. Durante bastante tiempo la idea de conocimiento y de ciencia misma excluían cualquier tipo de contradicción en las teorías científicas que trataban de explicar el mundo. Hoy es la misma razón, la que lleva a articular y manejar racionalmente contradicciones de gran utilidad en la inteligencia artificial.

La filosofía contemporánea de la ciencia muestra el deseo del matemático de comprender el mundo real cuando hace matemáticas (Byers 2007; Lakatos 1976). El matemático no se queda en la semántica formal del lenguaje sino que entra en el sentido del significado (Mazur 2012), donde la consistencia en los sistemas es clave y donde son pilares básicos la certeza intuitiva y las lógicas que nos permiten hacer deducciones a partir de las intuiciones. Los axiomas matemáticos son intuiciones básicas que sirven como fundamento de un sistema matemático particular y no son, por lo tanto, válidos en todos los sistemas.

En esta línea de reconocimiento de sistemas plurales y lenguaje, la pluralidad de opciones personales y comunitarias nos lleva a distinguir entre el lenguaje público del signo (propio, aunque no exclusivo, de las matemáticas y las ciencias empíricas) y el lenguaje personal del símbolo (propio, aunque no exclusivo, de la metafísica y la religión) (Leach 2010, 2012 y 2014). Los modelos del lenguaje matemático del signo son públicos y externos a la conciencia personal. Por el contrario, los modelos del lenguaje del símbolo están inseparablemente unidos a valores personales y comunitarios. Su significado se entiende y se transmite desde la conciencia personal y comunitaria.

2 Los lenguajes de la matemática y las ciencias empíricas ↑

Aunque pueda parecer que la matemática es una ciencia particular como otra cualquiera, no es así. La matemática se caracteriza actualmente por ser un lenguaje público, común a todas las ciencias, con una semántica formal de signos, que goza de un aprecio especial por sus enunciados presuntamente ciertos. Este aprecio especial de la matemática plantea una particular problemática interdisciplinar en relación con la metafísica y la religión.

2.1 Relaciones interdisciplinares entre la matemática y la religión ↑

La verdad, la certeza y la armonía de la matemática han otorgado tradicionalmente un gran valor cognitivo a la matemática. Este aprecio cognitivo ha tenido sin embargo efectos ambivalentes en la relación interdisciplinar de la matemática con la metafísica y la religión. Mientras que en algunos casos se ha dado a la verdad, certeza y armonía de la matemática un valor metafísico y religioso, en otros casos se les ha dado un valor anti-metafísico y anti-religioso. En estos últimos casos la verdad, certeza y armonía de la matemática le han llevado a cerrarse sobre sí misma y a negar cualquier valor metafísico del lenguaje humano, que vaya más allá del lenguaje matemático.

La mirada de la ciencia es poderosa tecnológicamente, es capaz de transformar el mundo pero no es capaz de interpretarlo. La mirada religiosa como escucha a la realidad no puede cerrarse sobre sí misma, como mera mirada científica y tecnológica, necesita abrirse al mundo científico y tecnológico entendiéndolo como servicio. La metafísica puede encauzar buenas preguntas, pero no determinar si su discurso es válido o no al margen de la ciencia (Fernandez- Rañaga 2008; Leach 2014; Popper 1986). El servicio ético, que nace de la metafísica y la religión, pasa necesariamente por el mundo científico y tecnológico. A lo largo de la historia se han mostrado muchas diferencias e interrelaciones entre la matemática, la metafísica y la religión. Estas interrelaciones son asimétricas, pues mientras que la matemática se puede estudiar aisladamente, como si la metafísica y la religión no le añadiesen ningún significado nuevo, no ocurre así con la metafísica y la religión, que no se pueden aislar de la matemática (Leach 2010).

Un ejemplo importante del valor metafísico y religioso de la matemática lo encontramos, ya en la antigüedad, entre los filósofos platónicos y pitagóricos. Es conocido el valor religioso que daban los matemáticos pitagóricos a ciertos enunciados matemáticos y el valor real-metafísico que dan a la matemática los filósofos platónicos, algunos de ellos contemporáneos nuestros. Entre los matemáticos contemporáneos nuestros es conocida la visión platónica de la matemática que tenía Kurt Gödel.

También es importante notar que actualmente encontramos frecuentemente un ejemplo del valor religioso de la matemática en las opciones personales de muchos matemáticos actuales que integran de diversas formas sus creencias religiosas con su activa dedicación a la matemática. Por ejemplo, el pensamiento de Michael Heller conduce a la idea tradicional de un Dios trascendente que, por otra parte, es el origen creador, el fundamento del ser, del que surge el espacio-tiempo del mundo creado. En la conferencia de recepción del premio Templeton, explica así su posición:

“*Los procesos del universo pueden ser visualizados como una sucesión de estados de modo que el estado precedente es causa del siguiente (…). Hay siempre una ley dinámica que prescribe cómo un estado genera otro. Pero las leyes dinámicas se expresan en la forma de ecuaciones matemáticas; por ello, si nos preguntamos acerca de la causa del universo, deberíamos preguntarnos sobre la causa de las leyes matemáticas. Haciendo eso, volvemos al gran proyecto de Dios pensando el universo, la cuestión sobre la causalidad última (…): ¿Por qué hay algo en vez de nada? Al preguntarnos esta cuestión, no estamos preguntando por una causa como las demás. Nos estamos preguntando por la raíz de todas las posibles causas*” (Heller, *Reflexions on Key Books and Publications*, templetonprize.org).

El fondo de las preocupaciones de Heller apunta siempre hacia la filosofía o metafísica del universo, donde el fundamento de lo real pone en relación las raíces ontológicas del universo con la ontología de la Divinidad y el acto creador.

Sin embargo, también podemos aportar contraejemplos. Un ejemplo de valor anti-metafísico y anti-religioso de la matemática se muestra actualmente en la crítica positivista y en la crítica del racionalismo ateo. En estos dos últimos casos la verdad, la certeza y la armonía de la matemática son muchas veces consideradas como valores críticos, enfrentados al valor de la metafísica y la religión, e incluso se consideran en algunos casos los valores de la racionalidad y de la matemática como anti-metafísicos y anti-religiosos.

2.2 Valor cognitivo de la matemática ↑

Una de las razones por la que la matemática disfruta de un aprecio especial, por encima de todas las demás ciencias, es porque sus leyes son absolutamente ciertas e indiscutibles, mientras que las de todas las otras ciencias son, hasta cierto punto, discutibles y en constante peligro de ser superadas por hechos recientemente descubiertos (Albert Einstein a la Academia Prusiana de Ciencias de Berlín, el 27 de enero de 1921).

Desde que Einstein afirmase, en el año 1921, que los enunciados de la matemática son absolutamente ciertos e indiscutibles, ha habido mucha investigación, mucha discusión y mucha matización, acerca de la verdad y la certeza de los enunciados matemáticos. Baste recordar que Gödel publicó su teorema de incompletitud de la aritmética en el año 1931, diez años después de que Einstein hiciera esta afirmación sobre la verdad y la certeza de la matemática. Por el teorema de Gödel sabemos actualmente que los sistemas matemáticos que sean suficientemente complejos como para contener la aritmética no pueden ser automáticamente deducidos a partir de un conjunto también mecánicamente controlable de axiomas. Al poner en crisis la idea del posible control mecánico y programable de los sistemas matemáticos, el teorema de Gödel, y otros teoremas semejantes, han dado lugar a un pluralismo fáctico en la fundamentación de la matemática con consecuencias filosóficas y metafísicas (Davis y Hersh 1981; Gabbay y Guenthner 2011).

Señalar que existe recientemente un fuerte movimiento conjunto (*The Univalent Foundation Program,* del *Institute of Advanced Study Princeton*) entre relevantes sectores de matemáticos 'clásicos' y teóricos de ciencias de la computación (*computer science*) para refundar las matemáticas partiendo de un nuevo marco que desplace a la teoría de conjuntos como base de las matemáticas modernas. Este nuevo marco (*homotopy type theory*), liderado por Vladimir Voevodsky medalla Fields 2002 (*The Univalent Foundations Program*, 2013), surge de conectar *homotopy theory* con *constructive type theory* (variante de la teoría de tipos de Russell que sirve de base a una corriente muy importante de formalización y desarrollo de la *theoretic computer science*).

2.3 Certeza matemática y certeza empírica ↑

Hemos visto que desde el comienzo de la llamada ciencia moderna, en el siglo XVII, la matemática es un lenguaje común a todas las ciencias de la naturaleza. También hemos visto la importancia que ha tenido la formalización del lenguaje matemático en estos últimos siglos. La matemática y la lógica matemática nos permiten estructurar el conocimiento científico de la realidad en sistemas formales deductivos, aptos para ser tratados mediante procedimientos mecánicos programables y computables.

La matemática actual se caracteriza por poder tener una semántica o significado específicamente formal y mental, construido explícitamente mediante reglas a partir de signos definidos. El significado formal de la matemática tiene valor por sí mismo independientemente de su aplicación tecnológica y empírica, mientras que los enunciados de las ciencias de la naturaleza tienen un significado que depende de distintos tipos de observaciones empíricas de la naturaleza.

Gracias a la semántica formal de la matemática y de la lógica matemática, los lenguajes de las ciencias empíricas alcanzan un grado máximo de claridad, objetividad y estructuración cuando logran ser expresados con formulación matemática.

2.4 La matemática, lenguaje mental y real a la vez ↑

Los enunciados matemáticos no pretenden ser sólo verdaderos en el mundo del pensamiento y de las ideas, sino que pretenden también servir para explicar el mundo de la realidad empírica. Dicho con otras palabras, la matemática se enfrenta con el reto de que puede enunciar leyes, cuyo significado es en principio meramente mental, pero que siempre pueden corresponderse con las leyes que cumplen hechos reales, empíricamente observados.

En efecto, el uso moderno de la matemática como lenguaje privilegiado de las ciencias de la naturaleza ha contribuido decisivamente a que el conocimiento científico tenga en la cultura moderna un significado público, global y transcultural. Un significado que, cuando los enunciados científicos logran ser expresados como enunciados matemáticos, es igual para todos, independientemente del nicho cultural en el que se haya originado dicho significado y de la valoración personal o comunitaria que tenga dentro de ese nicho cultural.

2.5 Intuición matemática y realidad empírica ↑

Sobre la relación entre la verdad y certeza de la matemática, producto de la mente, y la verdad y certeza empírica, dijo Einstein en 1921 lo siguiente:

"*¿Cómo puede ser que la matemática, que en último término es producto del pensamiento humano, que es independiente de la experiencia, sea tan admirablemente apropiada para describir los objetos de la realidad? ¿Es la razón humana, entonces, sin experiencia, simplemente mediante el pensamiento, capaz de comprender las propiedades de las cosas reales? En mi opinión la respuesta a esta pregunta es, en pocas palabras, la siguiente: Las leyes matemáticas no son ciertas en cuanto se refieren a la realidad, pero son ciertas en cuanto no se refieren a la realidad. Me parece a mí que en este asunto se logró por primera vez una claridad completa tomando como punto de partida de las matemáticas la lógica matemática o la "axiomática". El progreso alcanzado por la axiomática consiste en haber separado cuidadosamente la lógica formal del contenido objetivo o intuitivo; de acuerdo con la axiomática las formas solas lógico-formales de las matemáticas, no tienen que ver con cualquier otro contenido intuitivo asociado a la lógica formal.*" (Albert Einstein a la Academia Prusiana de Ciencias de Berlín, 27 de enero de 1921).

La axiomática matemática, a la que hace referencia Einstein, separa cuidadosamente la lógica de los axiomas, es decir el contenido deductivo de la lógica, del contenido intuitivo de los axiomas. Esta separación dio lugar, en los comienzos del siglo XX, a un punto de partida claro para la discusión sobre la verdad de la matemática. Actualmente ese paradigma axiomático continúa estando en parte vigente, pero ha perdido el valor de certeza mecánica que a veces se le otorgaba. Actualmente sabemos, por el teorema de incompletitud, que la matemática no puede deducirse de un sistema de axiomas controlable mecánicamente mediante funciones algorítmicas efectivas.

Actualmente continuamos usando la intuición axiomática para definir sistemas matemáticos y continuamos confiando en que la verdad y certeza de los enunciados matemáticos se corresponde con la verdad y la certeza de los enunciados de las ciencias de la naturaleza, pero nuestra confianza en la conexión entre la intuición matemática y la observación empírica se ha vuelto más enigmática.

En el año 1960 el premio Nobel de física Eugene Paul Wigner describía así la inexplicable relación entre nuestro pensamiento y nuestra experiencia:

"*El milagro de la adecuación entre lenguaje de la matemática y la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Debemos estar agradecidos por ello y esperamos que este lenguaje seguirá siendo válido para la investigación futura y que se extenderá, para bien o para mal, para nuestro disfrute, aunque tal vez también para nuestro desconcierto, a otras amplias ramas del conocimiento.*" (E. P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, 1960)

La relación entre el lenguaje matemático y la realidad empírica siempre ha sido un enigma y continúa siéndolo porque aunque no acabamos de entenderla del todo, sin embargo confiamos en que existe una correspondencia entre pensamiento y realidad, entre realidad y conocimiento científico, entre inteligencia humana e inteligencia artificial... En último término confiamos en que existe una correspondencia entre la intuición matemática y la intuición empírica. Pero, ¿qué es la intuición matemática y cómo resulta que la intuición matemática sirve para formalizar científicamente la intuición empírica? Como dice Wigner esto es un don que ni entendemos ni nos merecemos (Jordan, V. Neumann y Wigner 1933; Wigner 1960).

3 Los lenguajes de la metafísica y la religión ↑

Para los científicos que no necesitan hacerse preguntas metafísicas, las matemáticas y las ciencias de la naturaleza aceptan la realidad como un hecho dado; el cuestionamiento termina ahí. Sin embargo, la metafísica se pregunta por qué son nuestras mentes capaces de comprender tanto el mundo físico como las matemáticas. La metafísica se pregunta por qué existen las cosas. ¿Por qué hay algo en vez de no haber nada? También se pregunta por la libertad como característica propia del ser humano. ¿Qué es la libertad? ¿Por qué es el ser humano libre? Para muchos científicos actuales la respuesta a esas preguntas excede a la ciencia, pero para los científicos que creen en la metafísica, estas preguntas tienen una respuesta en el lenguaje propio de la metafísica. (El filósofo E. Gilson en su obra: "*From Aristotle to Darwin and Back Again. A Journey in Final Causality, Species*", 1984, aborda históricamente el tema de la causalidad moderna y la causalidad formal, reflexionando sobre las relaciones entre ciencia y metafísica).

Al ofrecer una forma más global y radical de hacer preguntas sobre la realidad, la metafísica sugiere la posible existencia de un principio último que justifique la existencia de las cosas. Para mucha gente las preguntas metafísicas son inevitables. Pero también sabemos que a lo largo de la historia han existido muchos tipos de percepciones acerca de las últimas cuestiones y por lo tanto, muchos tipos de respuestas a las últimas preguntas metafísicas. Las preguntas y respuestas de tipo metafísico hacen que se formen comunidades distintas, formadas por personas que comparten distintas culturas metafísicas y religiones.

3.1 Significado público y finalidad personal y comunitaria ↑

La relación entre los lenguajes de la matemática y los lenguajes de la metafísica y la religión es vista de distinta forma por los distintos filósofos de la matemática. Esta relación está siempre delimitada por el significado público de los lenguajes de la matemática. Pero más allá de los límites del lenguaje matemático, los filósofos de la matemática creyentes encuentran, además de ese significado público, un sentido y finalidad personal y comunitaria que puede ser expresada mediante los lenguajes de la metafísica y la religión.

El significado público del lenguaje de la matemática, que puede ser construido con signos formales, pretende tener siempre el mismo significado para todos independientemente de sus creencias personales y comunitarias. Ahora bien, aunque el significado público de los lenguajes formales de la matemática es apto para la aplicación tecnológica, no es capaz de expresar el último sentido y la finalidad de la vida humana, personal y comunitaria.

Los lenguajes de la metafísica y la religión se caracterizan, por lo contrario, porque pueden expresar la finalidad de la vida humana y expresar la libertad personal, que va más allá del mero significado público y programable desde la computación.

3.2 La palabra infinito como ejemplo ↑

El infinito es un ejemplo de palabra que tiene un significado público matemático y puede tener también un sentido metafísico, personal y comunitario. Como signo matemático, el infinito tiene dos significados distintos, ambos públicos: el infinito potencial y el infinito real. El infinito potencial es una sucesión de signos matemáticos que puede ser tan grande como queramos, ya que no termina. El infinito matemático actual es un conjunto que posee un número ilimitado de elementos. Por ejemplo, podemos considerar los números naturales como una sucesión de números N = 1, 2, 3,... que no termina o podemos considerar todos los números de N en su conjunto N = {1, 2, 3,...} y llamar a todo este conjunto infinito actual. Tanto el infinito actual como el potencial se pueden representar con signos matemáticos, que tienen un significado público que todo el mundo puede comprender.

Cantor demostró matemáticamente que la consideración de N como un conjunto infinito actual nos lleva a considerar otros infinitos que son 'mayores' que N, llamados números transfinitos. La dificultad para aceptar los números transfinitos llevó a algunos matemáticos constructivistas a negar su existencia. Matemáticamente se puede aceptar la existencia de tanto el infinito actual como el potencial o se puede rechazar la existencia del infinito actual y sólo admitir el infinito potencial, pero en ambos casos el infinito tiene un significado público.

El infinito se utiliza también como un símbolo con un significado personal que representa la realidad última y definitiva, mientras que el símbolo metafísico finito significa la realidad no definitiva. Las religiones monoteístas afirman que Dios es infinito, porque no podemos definir o delimitar sus propiedades a través de los conceptos humanos. El significado religioso y metafísico del infinito incluye la opción personal libre de aceptar o rechazar la existencia de Dios como realidad infinita, última y definitiva.

3.3 Los lenguajes de la metafísica y la religión ↑

El lenguaje de la metafísica tiene su origen filosófico en la necesidad de expresar explícitamente los últimos valores que mueven a las personas y a las comunidades a actuar y en la necesidad personal de encontrar la última razón por la que existen las cosas. Esa pregunta nace de la búsqueda por el último significado de la existencia humana, incluyendo la vulnerabilidad de esa existencia, el mal, la contingencia y la muerte. Esta búsqueda metafísica de valores y de sentido se da siempre de algún modo en todas las diferentes religiones.

El significado de los lenguajes personales y comunitarios permite hacer preguntas y encontrar respuestas acerca de características específicas de la naturaleza humana. Permite discutir acerca de la libertad humana, de la conciencia, de la vulnerabilidad y de la contingencia de la condición humana, de la presencia de la muerte junto a la vida, y de cómo las relaciones interpersonales constituyen un tipo de comunicación singular que da lugar a la comunidad humana.

En el estudio de la interrelación entre esos dos aspectos del lenguaje, por una parte el aspecto matemático-público y por otra parte el aspecto metafísico-personal, estriba en gran parte el interés interdisciplinar del estudio de las relaciones entre la matemática y la religión. Mientras que el significado semántico de los lenguajes de la matemática se caracteriza por su carácter público y por su precisión formal, que los hace aptos para la aplicación tecnológica, el significado de los lenguajes de la metafísica y la religión se caracteriza por incluir valores y finalidades que dan sentido personal y comunitario a los enunciados.

Por ejemplo, el enunciado ‘Dios es creador del Universo’ puede ser considerado como una expresión religiosa y metafísica que tiene un sentido personal y comunitario. Por tener un sentido personal puede ser un enunciado verdadero o falso, según sea interpretada por una persona creyente o por un no creyente, e incluso puede tener un significado distinto para una misma persona en distintas etapas de su maduración personal. Por otra parte también tiene un sentido comunitario, ya que ese enunciado no significa lo mismo para una comunidad de creyentes cristianos que para una comunidad con prácticas panteístas.

3.4 Los lenguajes humanos ↑

La metafísica utiliza un lenguaje distinto de los lenguajes de la lógica, las matemáticas y las ciencias de la naturaleza. El metafísico es un lenguaje con un significado personal y comunitario que representa realidades y relaciones últimas. Las palabras de la metafísica abarcan a Dios, al cosmos y al universo y pueden incluir también conceptos matemáticos, en los casos en los que se considera que la matemática es la última realidad de todas las cosas. Cualquiera que sea el tipo de lenguaje que usemos en la metafísica, su significado siempre excede al significado propio de las matemáticas y de las ciencias de la naturaleza. Por ejemplo, la palabra "número" tiene un significado preciso y definible formalmente en la matemática, pero cuando los pitagóricos antiguos usaban esa misma palabra con un significado metafísico, ese nuevo significado que le daban los pitagóricos excedía al significado de un signo que sólo se refiere a un objeto matemático. Su nuevo uso incluía también al último fundamento de las cosas del mundo entre sus significados.

El significado de un término científico es público cuando se refiere a un objeto medible. El significado de un término/símbolo metafísico debe sin embargo abordarse de manera diferente. Un símbolo metafísico sólo es comprensible dentro de una historia, personal y comunitaria, una tradición que utiliza dicho símbolo. La persona y la comunidad proporcionan la coherencia propia del símbolo. Es verdad, por otra parte, que el contexto de un símbolo también es empírico, pues se ha formado a partir de una historia y una tradición. Es más, los símbolos metafísicos pueden referirse incluso a “la naturaleza" de las cosas. Pero esto lo hacen de un modo diferente a las mediciones físicas de las ciencias de la naturaleza. El significado de los símbolos metafísicos, una vez más, depende en gran parte de las personas y las comunidades que los utilizan para hablar de realidades que van más allá de lo empírico.

De alguna manera, una hipótesis científica es también una imagen simbólica de cómo podría ser el mundo. Pero en la ciencia intentamos probar y comprobar empíricamente las hipótesis. En virtud de estas pruebas, algunas hipótesis se constata que son falsas y otras sobreviven para volver a ser probadas y comprobadas de nuevo. La verdad de las formulaciones metafísicas la comprobamos de manera diferente. Los enunciados metafísicos se nos muestran como verdaderos cuando presentan autenticidad y coherencia intuitiva en el contexto de valores personales que compartimos con una comunidad a la que pertenecemos. A las personas que nos observan desde fuera de nuestro contexto comunitario les es, naturalmente, muy difícil juzgar la verdad intuitiva y la coherencia de nuestro punto de vista metafísico.

Otra diferencia entre las ciencias de la naturaleza y la metafísica es que en las ciencias de la naturaleza, en principio al menos, se dice que una hipótesis y una teoría nunca son absolutas, sino sólo la mejor aproximación conocida hasta el momento presente mediante un método científico. En la percepción y en el lenguaje metafísicos, sin embargo, el objetivo es llegar a un absoluto, un marco de referencia que pueda servirnos como una visión permanente de la realidad y de los valores que fluyen de ella.

Precisamente porque las hipótesis científicas no intentan llegar a una última finalidad, los científicos pueden mantener puntos de vista metafísicos distintos. Pueden ser agnósticos, ateos o teístas en sus creencias fundamentales.

Al llegar a este punto en nuestra comparación de los lenguajes propios de las matemáticas, las ciencias empíricas y la metafísica, podría fácilmente parecer que estamos examinando tres mundos completamente diferentes. La diferencia puede parecer especialmente grande entre los símbolos metafísicos y los signos de matemáticas. Sin embargo, los tres lenguajes también pueden verse como complementarios ya que, mediante el uso de todos ellos expresamos la realidad completa de la experiencia humana. Ninguno de estos lenguajes puede ser excluido.

La diferencia clave entre estos lenguajes reside en la utilización de signos y símbolos. En nuestro lenguaje cotidiano, realmente no diferenciamos normalmente entre el uso que hacemos de las palabras "signo" y "símbolo", y de hecho la distinción es un tanto artificial y académica. A menudo se considera que signo significa lo mismo que "símbolo", pero en las matemáticas, signo es una notación técnica que representa un número o función o relación entre los números. Un símbolo tiene un contenido más amplio capaz de hablar de la experiencia humana, de una narrativa, de un mito, o del significado metafísico. Los símbolos son a menudo tomados de la percepción humana (por ejemplo, un animal o espíritu invisible), no meramente un signo abstracto (como una X o una Y). Esta distinción puede ser muy útil si queremos comprender la interacción de los dos tipos de lenguajes: formal y metafísico y la fuerza que subyace en la conceptualización del símbolo como idea que recoge una verdad abriendo a un mundo más auténtico de la vida de la persona. Por último, responderemos a la pregunta por la relación interdisciplinar entre el lenguaje matemático y el religioso. El lenguaje religioso añadirá al lenguaje metafísico la presencia de la acción de Dios, que en el cristianismo se hará, en el Hijo y por medio del Espíritu, uno de nosotros, con la realidad de la Encarnación.

4 El lenguaje religioso ↑

Como en la metafísica, en las religiones también se da una búsqueda de valores últimos o definitivos. Sin embargo, las religiones añaden a la búsqueda metafísica de valores definitivos diversas formas de encuentro con dichos valores basadas en una tradición religiosa.

Existen tradiciones que comparten, por ejemplo, una cierta percepción metafísica según la cual el universo puede encontrar en sí mismo la razón última de su existencia. Frecuentemente se llama panteístas a los que tienen esta visión del universo. Hay otro modo de plantear la cuestión acerca de las últimas preguntas que podemos denominar agnóstico. Desde una visión agnóstica se argumenta que no podemos saber cuál es el último principio de las cosas, por lo que la pregunta acerca de la existencia de dicho último principio es irrelevante. En tercer lugar, existe la percepción teísta que cree que el universo existe porque Dios existe y cree que Dios es el creador que ha hecho y mantiene el universo. Por último, también es adecuado señalar aquí otras tradiciones que vienen a decir que el último principio de las cosas está en las matemáticas. De este último tipo han aparecido históricamente entre los pitagóricos y ciertos platónicos.

El lenguaje metafísico no agota la capacidad humana de preguntar y encontrar el sentido de la vida humana. En las religiones hay, además de los lenguajes metafísicos, una pluralidad de lenguajes que expresan, a través de diversas formas de expresión religiosa de la fe, la búsqueda y el encuentro creyente de sentido personal y comunitario.

En particular en las tradiciones cristianas, creemos por la fe trinitaria que Dios Padre se hace, por la fuerza del Espíritu, presente en el mundo por su Palabra encarnada, es decir, por el Hijo de Dios hecho hombre. Esta presencia no es meramente científica. Tampoco es meramente metafísica. La presencia que se nos comunica por la Palabra es más que una mera narrativa, pues además de relatar del significado de la acción humana en el mundo, nos habla de una relación cotidiana del ser humano con Dios trascendente. Es decir, esta Palabra cristiana no se refiere sólo a actitudes y relaciones personales intramundanas, sino que hace referencia a una relación personal básica de confianza, misericordia y perdón, con Dios Padre trascendente. Habla y da sentido a la muerte humana mediante la resurrección de Cristo. Es a la vez humana y trascendente.

5 Relación interdisciplinar actual de los dos lenguajes ↑

Al llegar a este punto en nuestra comparación de los lenguajes propios de las matemáticas y las ciencias empíricas por una parte, y los lenguajes propios de la metafísica y la religión, podría fácilmente parecer que estamos examinando dos mundos completamente diferentes. Sin embargo, los dos lenguajes también pueden verse como interdisciplinarmente complementarios ya que, mediante el uso de todos ellos expresamos la realidad completa de la experiencia humana. Ninguno de estos lenguajes puede ser excluido, aunque como vimos anteriormente la relación de ambos lenguajes con la realidad no es simétrica, mientras que la matemática puede no necesitar de la religión, la religión, especialmente la religión cristiana, no puede prescindir de la matemática y las ciencias. Esta asimetría se manifiesta especialmente en la religión cristiana porque en ella los valores humanos cobran especial importancia por su carácter simultáneamente humano y trascendente. Para la comprensión del mundo es pertinente que la religión cristiana busque una apertura a la visión empírico-matemática del mundo. A través del conocimiento que trata de ser objetivo, separado de nosotros, y que intenta aislarse en un lenguaje de signos, se descubre el conocimiento simbólico. En el cristianismo Dios se hace presente en el mundo por la Encarnación de su Hijo. Por la Encarnación de Dios, la contemplación religiosa del mundo incluye las miradas metafísica y empírico-matemática, quedando integradas las informaciones y las valoraciones que producen ambas miradas en una nueva valoración por la presencia de Dios trascendente.

Pero, si las matemáticas han influido en la evolución de la racionalidad humana a través de la historia, ¿qué tipo de racionalidad producen las matemáticas actuales? El modo como entendamos la racionalidad también se reflejará en nuestras visiones metafísicas. Durante la ilustración del siglo XVII, un matemático como Leibniz tenía una concepción determinista de la racionalidad que quedó reflejada en sus creencias metafísicas. Como consecuencia, Leibniz tuvo una visión determinista en las cuestiones metafísicas. Leibniz veía a Dios como el controlador absoluto de todas las acciones en el universo.

Actualmente no tenemos una visión determinista de la racionalidad, lo cual influye naturalmente en nuestras preguntas metafísicas. Leibniz propuso que, con el fin de terminar con los conflictos, cuando dos personas están involucradas en un litigio deben definir los conceptos dentro de un sistema formal de cálculo. Una vez definidos los conceptos, las partes involucradas en el debate deberían simplemente sentarse y hacer cálculos. Leibniz pensaba que, de esta manera, se pueden resolver todos los conflictos. Hoy en día, vemos la propuesta de Leibniz como ingenua. Ya que incluso sabemos que no podríamos realizar tales cálculos dentro de un único sistema axiomático.

La apertura de nuestro mundo racional al riesgo no es una apertura a la irracionalidad. Actualmente abordamos estas cuestiones metafísicas con una consistencia que caracteriza el pensamiento racional. Por nuestra evaluación racional, buscamos la consistencia, es decir, la falta de contradicción dentro de cada uno de los sistemas de plurales de pensamiento. También hacemos juicios acerca de la coexistencia entre estos sistemas plurales, cuando no se excluyen mutuamente.

Para mantener la racionalidad en nuestro mundo necesitamos, en último término, dar un salto metafísico. El lenguaje formal de las matemáticas no puede probar su propia consistencia. Por el contrario, nuestra creencia en la consistencia es una presunción metafísica. De este modo la consistencia se convierte no sólo en un valor racional y científico, sino también en un valor teológico referido a la explicación de lo que es estable y coherente. La teología debe tratar de ser tan compatible como le sea posible con la lógica, las matemáticas y las ciencias empíricas en un mundo que está abierto a la incompletitud, la indecidibilidad, el riesgo y el error. Esta puede ser una lección que ofrece la historia de las matemáticas al actual diálogo entre ciencia y religión.

6 Bibliografía ↑

Ausiello, G. y Petreschi, R. 2013. *The Power of Algorithms: Inspiration and Examples in Everyday Life*. New York: Springer Science & Business Media.

Benacerraf, P. y Putnam, H., eds. 1983. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge: Cambridge University Press, 2º edición.

Béziau, Jean-Yves. 2000. "What is Paraconsistent Logic?". En *Frontiers of Paraconsistent Logic*, editado por D. Batens et al., 95-111. Baldock: Research Studies Press.

Boyer, C. B. y Uta C. M. 2011. *A History of Mathematics*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Boyer, C.B. 1991. *History of Mathematics*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 3º edición.

Bunge, M. A. 2008. *Causality and Modern Science*. London: Transaction Publishers.

Byers, W. 2007. *How Mathematicians Think*. Pricenton: Princenton University Press.

Cañón, C. 1993. *La matemática: creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

Casti, J. L. y DePauli, W. 2001. *Gödel: A Life of Logic*. Cambridge: Basic Books.

Church, A. 1936. "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory". *American Journal of Mathematics* 58: 345–63

Courant, R. y Robbins, R. 1941. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford: Oxford University Press.

Davis, M. 2000. *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*. New York: W.W. Norton and Company.

Davis, P. J. y Hersh, R. 1981. *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser Verlag.

Dou, A. 1970. *Fundamentos de la matemática*. Barcelona: Labor.

Dunmore, C. 1992. "Meta-level revolutions in mathematics". En *Revolutions in Mathematics*. editado por D. Gillies, 209-225. Oxford: Oxford Science Publications, The Clarendon Press.

Durand, G. 1971. *La imaginación simbólica*. Buenos Aires: Amorrortu editores.

Einstein, A. 1921. *Geometrie und Erfahrung* (Geometría y experiencia). Comunicación a la Academia Prusiana de Ciencias de Berlín el 27 de enero de 1921, editado por Methuen & Co. Ltd, London. URL: https://archive.org/details/geometrieunderf00einsgoog

Emerson, E. A. 1990. "Temporal and Modal Logic". En *Handbook of Theoretical Computer Science*, editado por J. van Leeuwen, capítulo 16. Cambridge: MIT Press.

Fernández- Rañada, A. 2008. *Los científicos y Dios*. Madrid: Trotta.

Folkerts, Menso. 2006. *The Development of Mathematics in Medieval Europe*. Burlington, VT: Publishing Co.

Frege, G. 1879. *Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle. URL: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65658c

Gabbay, D. M. y Guenthner, F., eds. 2011. *Handbook of Philosophical Logic* (2nd edition) - Vol. 1 a Vol. 17. London: Springer.

Gabbay, D. M.; Hogger, C. J. y Robinson, J. A., eds. 1996. *Handbook of logic in artificial intelligence and logic programmin*g. Vol. 1 a Vol. 5. Oxford: Clarendon Press.

Galilei, G. 1623 *Il saggiatore*. Rome: Giacomo Mascardi. URL: http://it.wikisource.org/w/index.php?title=Il_Saggiatore/6&oldid=486318

Gardiner, A. 2002. *Understanding Infinity: The Mathematics of Infinite Processes*. New York: Dover Publications.

Giaquinto, M. 2002. *The search for certainty: a philosophical account of foundations of mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Gillies, D. 1992. *Revolutions in Mathematics*. New York: Oxford Science Publications, The Clarendon Press.

Gilson, E. 1984. *From Aristotle to Darwin and Back Again. A Journey in Final Causality, Species and Evolution*. Notre Dame, South Ben: University of Notre Dame Press.

Gödel, K. 1944. "Russell's Mathematical Logic". *Journal of Symbolic Logic* 119-141.

Gödel, K. 1931. "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I". *Monatshefte für Mathematik Physik* 38: 173–198.

Harel, D. 1992. *Algorithmics - The Spirit of Computing*. Reading, UK: Addison-Wesley.

Hawking, S. 2005. *God Created the integers*. Canada: Running Press.

Heilbron, J. L., ed. 2003. *The Oxford Companion to the History of Modern Science*. Oxford: Oxford University Press.

Hilbert, D. 1928. "Die Grundlagen der Mathematik, Abhandlungen aus dem Mathematischen". *Seminar der Hamburgischen Universität* 6: 65–85.

Hilbert, David. 1928. *Hamburger Mathematischen Einzelschriften*. Se reproduce la ponencia presentada por Hilbert en

Hamburgo de junio de 1927. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Hodges, W. 2001. *Logic: An Introduction to Elementary Logic*. London: Penguin Group.

Hortala, M. T., Leach Albert, J. y Rodríguez Artalejo, M. 2001. *Matemática discreta y lógica matemática*. Madrid: Editorial Complutense.

Jordan, P., Neumann, J. v. y E. Wigner, E. 1933. "On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism". *Annals of Mathematics*. Second Series, Vol. 35, No. 1 (En. 1934): 29-64.

Katz, V.J. 1998. *A History of Mathematics: An Introduction*. Boston: Addison Wesley (2º edición).

Kleene, S. C. 1952. *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam: Groningen.

Kline, M. 1990. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford: Oxford University Press.

Knuth, D.E. 1969. *The Art of Computer Programming, Seminumerical Algorithms*, Vol.2. Reading, UK: Addison-Wesley.

Lakatos, I. 1976. *Proofs and Refutations. The logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Leach, J. 2014a. "Matemática e metafísica". *Civiltà Cattolica Quaderno* N°3931.

Leach, J. 2014b. "The languages of artificial intelligence, the languages of metaphysics, and the languages of faith". *Scientia et Fides* 2(1):81–98.

Leach, J. 2012. "Taking Options and Decisions". *Revista Portuguesa de Filosofía* 68 (1-2): 87-104.

Leach, J. 2010. *Mathematics and Religion. Our Languages of Sign and Symbol. Templeton Science and Religion Series*. West Conshohocken: Templeton Press.

Leibniz, G. W. 1686/1981. *Discurso sobre la metafísica*. Madrid: Alianza Editorial:

Lorenzen, P. 1962. *Metamathematik*. Mannheim.

Mazur, B. 2012. "Visions, Dreams, and Mathematics". En *Circles Disturbed: The interplay of Mathematics and Narrative*, de A. Doxiadis y B. Mazur. Princeton: Princeton University Press.

Motwani, R. y Raghavan, P. 1995. *Randomized Algorithms*. New York: Cambridge University Press.

Olby, R. C. 1996. *Companion to the History of Modern Science*. London: Taylor & Francis.

Popper, K. 1986. *El universo abierto: un argumento en favor del indeterminismo*. Madrid: Tecnos.

Plantinga, A. 1967. *God and others minds. A study of the rational justification of belief in God*. New York: Cornell University Press.

Pruss, A. R. 2006. *The Principle of Sufficient Reason: A Reassessment*. Cambridge: Cambridge University Press.

Russell, B. 1903. *The Principles of Mathematics*. New York: W. W. Norton & Company.

Salmon, N. 2005. *Metaphysics, Mathematics, and Meaning*. Oxford: Oxford University Press.

The Univalent Foundations Program. 2013. *Homotopy Type Theory (Univalent foundations of Mathematics)*. Princeton: The Univalent Foundations Programs, Institute of Advanced Study.

Troelstra, A. S. 1991. *A History of Constructivism in the 20th Century*. University of Amsterdam. ITLI Prepublication Series ML-91-05 https://www.illc.uva.nl/Research/Publications/Reports/ML-1991-05.text.pdf

Turing, A. M. 1936-1937. “On Computable Numbers, with an Application to Entscheidungs problem”. *Proceedings of the London Mathematical Society* 2(42): 230–265

Turing, A. M. 1947. *Lecture to the London Mathematical Society on 20 February 1947*, del archivo de Turing, King’s College, Cambridge.

Tymoczko, T., ed. 1998. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Wigner, E. 1960. “The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences”, presentada en la Universidad de Nueva York, 11 de mayo de 1959. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13: 1–14.

Zadeh, L. A. 1965. “Fuzzy sets”. *Information Control* 8: 338–353.

Zermelo, E. 1908. “Investigations in the Foundations of Set Theory I”. En *From Frege to Gödel*, editado por J. van Heijenoort. Cambridge. MA: Harvard University Press.

7 Cómo Citar ↑

Leach, Javier. 2016. "Matemáticas y religión". En Diccionario Interdisciplinar Austral, editado por Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck. URL=http://dia.austral.edu.ar/Matemáticas_y_religión

8 Derechos de autor ↑

ISSN: 2524-941X